様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2015
課題番号：２３７４０１８２

研究課題名（和文）非可換ソリトンの研究と弦理論・可積分系への応用

研究課題名（英文）Noncommutative Solitons and application to string theory and integrable systems

研究代表者
濱中　真志（Hamanaka, Masashi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・助教

研究者番号：７０３７７９７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：研究計画に基づき，非可換空間上のソリトン研究を推し進めた．特に非可換インスタントンのADHM構成について詳しく調べ，要となる双対性の証明をほぼ完結した．またQuasideterminantと呼ばれるある種の非可換行列式の性質を詳しく調べ，非可換ソリトン解の構成・解析，解空間のもつ対称性の解明，高次元可積分系と低次元可積分系の関連などについて議論した．非可換化という方向性の意義について知見を得た．また，二重周期性を持つモノポールのモジュライ空間の漸近計量を導出し，新しいクラスのハイパーケーラー計量を得た．

研究成果の概要（英文）：We have studied solitons in noncommutative spaces. In particular, we have mostly proved a reciprocity in the ADHM construction of noncommutative instantons. Furthermore, by examining algebraic properties of quasideterminants, we clarified
mathematical structure of the noncommutative soliton equations. We also discussed significance of noncommutative extension of them.

研究分野：素粒子論、数理物理

キーワード：ソリトン　インスタントン　可積分系　ツイスター理論　非可換幾何　ADHM構成法　モノポール　ハイパーケーラー計量

１．研究開始当初の背景

ソリトン理論の非可換空間への拡張は，単なる一般化ではなく，物理としても数理物理としても非常に面白いものを含んでいる．特に，非可換空間上のゲージ場の理論は，背景フラックス中のゲージ場の理論と等価であり，量子ホール効果の分野などで古くから様々な応用がなされてきた．さらに非可換空間では特異点の解消が一般に起こり，新しい物理的対象が現れる．弦理論のある状況では非可換ソリトンはＤブレーン(弦理論のソリトン)そのものに対応し，D ブレーンの解析が非可換ソリトンの解析から行われる．ここで非可換ソリトンは取り扱いが非常に容易になることがあり，Sen の予想といった D ブレーン力学の重要な問題に対しても，さまざまな応用がなされ，成功をおさめた．
この流れを受け，ゲージ理論以外のソリトン方程式(KdV 方程式など)の非可換化の研究も活発になった．特に 2006 年に申請者により，「これらの方程式の大半は，4 次元ゲージ理論の Anti-Self-Dual Yang-Mills (ASDYM)方程式から次元還元などにより得られる(非可換 Ward 予想)」ことが明らかにされ，対応する物理系への応用の可能性が開かれた．また最近の申請者達の研究により，非可換 ASDYM 方程式の解を解にうつす変換(ベックルント変換)が見出され，非可換インスタントンだけでなく(作用無限大の)新しい解も具体的に生成された．これらの解は quasideterminant と呼ばれるある種の非可換行列式で簡明に記述されることが分かったが，この事実は低次元の非可換可積分方程式についても言えることが知られており，可積分系の持つ(次元によらない)普遍的な構造の存在を示唆している．非可換 ASDYM 方程式の可積分性の議論には非可換ツイスター理論という幾何学的枠組みが有用であることも，オックスフォード大学のグループによって明らかにされつつある．
ASDYM 方程式が記述する弦理論の状況は，ユークリッド計量の場合はタイプ II 弦理論の DpD(p+4)ブレーン系の低エネルギー有効理論，不定値計量(＋＋－－)の場合は N=2 弦理論の標的空間上の弦の場の理論の有効理論(世界面の超対称性が通常の２倍ある理論で標的空間は４次元)である．上記の Ward 予想の文脈では，計量は後者であり，KdV 方程式は N=2 弦理論のなんらかの古典的配位を記述していると考えられる．
ユークリッド計量の場合の ASDYM 方程式の特解としてインスタントンと呼ばれるクラスがある．この解は作用の有限値を与えるため，場の量子論の経路積分に有限の寄与を与える．N=2 超対称性ゲージ理論の分配関数の厳密計算において，モジュライ空間の特異点解消の必要性から非可換インスタントンが導入されるが ADHM データとインスタントンのモジュライ空間の 1 対 1 対応は証明されていない．

２．研究の目的

本研究では，Quasideterminant と呼ばれるある種の非可換行列式を要に，非可換空間上のソリトン研究を推し進める． 特に，非可換ソリトン解の構成・解析，解空間のもつ対称性の解明，高次元可積分系と低次元可積分系の関連などについて詳しく調べ， 対応する物理系(N=2 弦理論など)に対してさまざまな応用を行う．また非可換インスタントンの数理構造の解明に向けて ADHM 構成法の非可換化および双対性の研究を推進する．
具体的な研究目標は以下の通りである．
(i) Quasideterminant に備わる恒等式(非可換プリュッカーなど) の幾何学的解釈を与え，低次元ソリトン理論(佐藤理論)の再定式化を行う．この成果を ASDYM 方程式の厳密解や双線形化の記述と見比べて，高次元可積分系と低次元可積分系との統一的記述を探る．佐藤理論の高次元化が可能であれば，ASDYM 方程式の解空間の対称性を解明する．
(ii) 非可換 ASDYM 方程式を運動方程式に持つような N=2 弦理論の有効作用を具体的に記述し，非可換 ASDYM 方程式の厳密解の具体的構成と弦理論的解釈および弦理論への応用を推し進める．また非可換 Ward 予想の具体例を介して，低次元ソリトン方程式に対しても同様の議論を行う．さらに Seiberg-Witten マップを具体的に与え， 可換側と非可換側の対応付けを行い「非可換空間上での可積分系」とは何かを定義する．
(iii) 非可換インスタントンの ADHM 構成法を詳しく調べ，数理構造を明らかにする．ADHM 構成法とは，インスタントン解のモジュライ空間と ADHM データのモジュライ空間との 1 対 1 対応(双対性) を基にしたものであり，その双対性の証明を非可換空間上に拡張することが一つの目標である．非可換空間上のゲージ理論の記述には，スター積を用いる形式とオペレータを用いる形式がある．前者は，物理的・幾何学的意味は比較的分かりやすいが，非可換パラメータに関する収束性の取り扱いが難しい．後者は，非可換パラメータの任意の値に対して議論を展開できるが，幾何学的解釈が難しい．

３．研究の方法

(i) 非可換 ASDYM 方程式の研究に関しては，quasideterminant のプリュッカー関係式の幾何学的解釈を詳しく調べ，非可換ツイスター理論との関連を探る．また背後にある無限次元の対称性を記述する代数を具体的に明らかにする．タウ関数の理論も構築する．
低次元非可換ソリトン方程式の研究に関しては，まず佐藤理論の非可換化を，可換極限も含めて quasideterminant を用いて試みる．この結果と非可換 ASDYM 方程式の結果を見比べ，共通点・相違点を具体的に列挙し，ツイスター理論と佐藤理論の関係を調べる．(可換極限の状況でも可能であれば)両者を統一できる新しい定式化を探る．

(ii) 非可換Ward予想に関わる非可換 ASDYM 方程式は(2+2)次元上で定義されるが，これは，N=2 弦理論の標的空間上の有効理論の運動方程式と一致する．すなわち，本研究の対象であるさまざまな非可換ソリトン方程式には，N=2 弦理論のある種の古典的配位が対応すると考えられる．この対応の下，ソリトン方程式の厳密解から対応する弦理論の配位の厳密な解析を行う．特に解の周りの揺らぎやエネルギー密度を計算し，それが(おそらく）低い次元のDブレーンを記述していることを実証する(Sen の予想の検証)．散乱過程も詳しく調べ，対応する特別な状況下での D ブレーン散乱の振る舞いも調べる．H非可換ASDYM方程式のベックルント変換を用いてさらに新しい厳密解を具体的に構成し，D ブレーンチャージを計算するなどして弦理論的解釈を与える．ASDYM 解は４次元のラプラス方程式の解から生成できるため，多種多様な厳密解の構成が実際に可能である．N=4 超対称 Yang-Mills 理論と N=2 弦理論との双対関係やツイスター弦理論との接点を調べるのも面白い．可換空間の状況での議論でも十分に価値がある．
次いで非可換性を時間方向に入れた場合の可積分性の基礎付けを行う．具体的には，背景フラックス中のゲージ理論の記述との対応を具体的に示し，(Non-abelian ゲージ群の場合の)Seiberg-Witten マップを見出すことにより，非可換可積分方程式とある種の可換可積分方程式の対応を具体的に与える．これによりPoisson構造，Hamilton構造を定義し，Liouville の意味での保存量の独立性を証明する．
(iii) 非可換 ADHM 構成法に現れるモジュライ空間の１対１対応を証明する．可換からの非可換摂動としてのスター積形式の議論をまず簡潔させ，次いで任意の非可換性に対して成り立つオペレーター形式での議論を行う．

４．研究成果

(i) Quasideterminant が満たすプリュッカー関係式が定義する無限次元空間(変形された佐藤グラスマン多様体と考えられる）とその対称性を考察した．2011 年 6 月の国際会議参加[5]の機会を利用し，Quasideterminantの生みの親の一人Vladmir Retakh 氏(ラトガース大学) を訪問し，有益な議論を交わした．厳密解の弦理論的解釈についてもいくつかの可能性を検討した．
非可換ASDYM方程式のベックルント変換を用いてさまざまな新しい解を具体的に生成し，quasideterminant を用いてすべて簡明な記述を与えた．この非可換行列式を用いることですべての証明が可換な場合よりはるかに簡明になることは特筆に値する[1].
(ii) 2013年3月にオハイオ州立大学を訪問し,児玉裕治氏と非可換KdV 方程式のnormal form について議論した．Seiberg-Witten マップでの可換側との対応が単なる変数変換でないことを確認した．非可換パラメータの１次の摂動での非可換可積分系の基礎づけについて詳しく調べた[10,16].
(iii) 可換空間での厳密な双対対応から非可換変形することでスター積を用いる記述での ADHM 双対性の証明を完結させた[4]．非可換パラメータに関する収束性は仮定しているが，モジュライ・パラメータはすべて含んだ解空間を取り扱っている．オペレータ形式による記述にも取り組み，(指数定理の結果を認めれば)ADHM 双対性が成り立つことを大体示した．特に，幾何学的理解の要となる Atiyah-Hori 公式の非可換版および非可換 Corrigan-Goddard-Osborn-Templeton の公式との関係(別証) も明らかにした[3].また，インスタントン解の(射影演算子を手で導入することのない) 系統的構成方法を見出し，この意味での一般解を具体的に構成した．
一連の成果に関して国内外の研究会で積極的に発表し，幅広い分野の専門家と質疑応答を行った．非可換化する必然性という点に関して現時点での自分なりの考えを率直に話した．場の量子論のインスタントン効果とクラスター分解原理について，また素粒子論における非可換ゲージ理論のあるべき姿について知見を得た[14].
また，名古屋大学多元数理科学研究科の菅野浩明氏，村中大地氏と共同で，2 重周期モノポールのモジュライ空間の計量を研究し，Gibbon-Manton のアイデアを適用することで，ある漸近領域でのハイパー・ケーラー計量(ALH 型)を具体的に構成した[5]．ゲージ場の自己双対性に関連したハイパー・ケーラー幾何学について総合報告をまとめた[7].

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　12　件）

[1] Masashi Hamanaka, ``Non-commutative Solitons and Quasi-determinants,’’ Proceedings of Symposia in Pure Math. 85 (American Mathematical Society, 2012) 381-390，査読有．
[2] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative ADHM construction revisited,’’Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. 21 (2013) 184-186，査読有．
[3] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative instantons revisited,’’J. Phys. Conf. Ser. 411, 012016 (2013) 1-11，査読有．
[4] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Exact construction of noncommutative instantons,’’ Frontiers of Mathematics in China 5 (2013) 1031-1046，査読有．
[5] M. Hamanaka, H. Kanno and D. Muranaka,

``Hyperkahler Metrics from Monopole Walls,'' Physical Review D 89, 065033 (2014) 1-7, 査読有.
[6] Masashi Hamanaka,``Noncommutative Solitons and Quasideterminants,'' Physica Scripta 89, 038006 (2014) 1-11, 査読有. 招待論文.
[7] 浜中真志, ``Hyper-Kahler 幾何の数理と物理,'' 素粒子論研究 119-4C (2012) 245-279, 査読無.
[8] 浜中真志, ``非可換ソリトン方程式の厳密解と可積分性,'' 素粒子論研究 118-3 (2010-11) C66, 査読無.
[9] 浜中真志, 中津了勇, ``非可換インスタントンの ADHM 構成法,'' 素粒子論研究電子版 13 (2012) No.2.
[10] 浜中真志, ``ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張,'' 素粒子論研究電子版 17 (2014) No. 4, 査読無.
[11] 浜中真志, 中津了勇, ``非可換インスタントンの ADHM 構成法,'' 九州大学応用力学研究所研究会報告 25AO-S2 (2014) 21-28, 査読有.
[12] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative Instantons and Reciprocity,'' 素粒子論研究電子版 23 (2016) No.2, 査読無.

〔学会発表〕(計 20 件)
[1] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``ADHM Construction of Noncommutative Instantons,'' 6th World Conference on Nonlinear Analysis, Athens, Greece, 2012 年 6 月 28 日, 招待講演.
[2] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``ADHM Construction of Noncommutative Instantons,'' Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena, University of Georgia, US, 2013 年 3 月 25 日, 招待講演.
[3] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative ADHM Constructions and Duality,'' Search for Classical Analysis and Quantum Integrable Systems, Kyoto University, Japan, 2014 年 11 月 16 日, 招待講演.
[4] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative Solitons and Instantons,'' Strings, Quivers and Cluster Algebras in Mathematical Physics, KIAS, Korea, 2014 年 12 月 20 日 招待講演.
[5] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Non-Commutative Solitons and Quasi-determinants,'' String-Math 2011, University of Pennsylvania, Philadelphia, USA, 2011 年 6 月 8 日.
[6] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative ADHM Construction Revisited,'' Progress of String Theory and Quantum Field Theory, Osaka City University, Japan, 2012 年 4 月 4 日.
[7] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Exact Construction of Noncommutative Instantons,'' SIDE10 International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equations, Ningbo, China, 2012 年 6 月 14 日.
[8] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative Instantons Revisited,'' The XXth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-20), Prague, Czech Republic, 2012 年 6 月 19 日.
[9] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative Instantons and Reciprocity,'' 30th Group Theoretical Methods in Physics (Group30), Ghent, Belgium, 2014 年 7 月 17 日.
[10] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative Integrable Systems and Quasideterminants,'' New Trends in Quantum Integrability, University of Surrey, Guildford, UK, 2014 年 8 月 18～22 日.
[11] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Yang-Mills Instantons in Noncommutative Spaces,'' 60 Years of Yang-Mills Gauge Field Theories, Nanyang Technological University, Singapore, 2015 年 5 月 28 日.
[12] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative Instantons and Reciprocity,'' Geometry in Gauge Theories and String Theory, KIAS, Korea, 2015 年 9 月 16 日.
[13] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative Instantons and Reciprocity,'' Developments in String Theory and Quantum Field Theory, Kyoto University, Japan, 2015 年 11 月 10 日.
[14] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``Noncommutative Instantons and Reciprocity,'' String-Math 2015, Sanya International Mathematics Forum, Hainan, China, 2016 年 1 月 1 日.
[15] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``非可換インスタントンの ADHM 構成法,'' 京大基研研究会「場の理論と弦理論」2012 年 7 月 26 日.
[16] 浜中真志, ``ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張,'' 京大基研研究会「場の理論と弦理論」2013 年 8 月 22 日.
[17] 浜中真志, 中津了勇, ``非可換 ADHM 構成法とインスタントン数の起源,'' 日本物理学会素粒子論領域, 高知大学, 2013 年 9 月 22 日.
[18] 浜中真志, 中津了勇, ``非可換空間上のインスタントンの ADHM 構成法,'' 日本数学会幾何学分科会, 愛媛大学, 2013 年 9 月 26 日.

[19] 浜中真志，中津了勇，``非可換インスタントンの ADHM 構成法，’’
九大応用力学研研究会「非線形波動研究の拡がり」，2013 年 10 月 31 日．
[20] Masashi Hamanaka and Toshio Nakatsu, ``ADHM Construction of Noncommutative Instantons,’’KEK 理論研究会 2015，2015 年 1 月 28～31 日．

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）
名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）
名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
「アインシュタイン牧場」の管理・運営
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~masashi.hamanaka/
浜中真志，``モノポールの数理と D ブレーン，’’ 数理科学 613（2014-07）45-50．
海外の研究機関でのセミナー講演 5 件．
国内の研究機関でのセミナー談話会講演 9 件．

６．研究組織
(1)研究代表者
濱中真志　（HAMANAKA　MASASHI）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教
研究者番号：70377977

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：