

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 29 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(S)

研究期間：2012～2016

課題番号：24224001

研究課題名(和文)代数幾何と可積分系の融合と深化

研究課題名(英文)Developments in Interactions between Algebraic Geometry and Integrable Systems

研究代表者

齋藤 政彦(Saito, Masa-Hiko)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：80183044

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 94,900,000円

研究成果の概要(和文)：不分岐な不確定特異点を持つ接続のモジュライ空間の構成，リーマン・ヒルベルト対応の研究により，対応するモノドロミー保存変形の幾何学を確立した．また，混合ツイスターD加群の理論の整備，可積分系の幾何学的研究において種々の成果を得た．高次元代数幾何学においては，端末的3次元射影多様体のある種の端収縮射の分類や，コンパクトケーラー多様体の標準環の有限生成性などの基本的結果のほか，モジュライ理論，シンプレクティック多様体に関する種々の成果を得た．量子コホモロジーの数学的定式化や，ミラー対称性の数学的理解についても大きな成果を得た．また，代数多様体の層の導来圏に関する研究においても種々の成果を得た．

研究成果の概要(英文)：We established the geometric Painleve property of nonlinear differential equations for isomonodromic deformations of connections with generic unramified irregular singularities and regular singularities with fixed spectral types. We also established theory of Mixed twister D-modules and developed several geometric theories for integrable systems. As for higher dimensional algebraic geometry, certain types of extremal contractions of 3-dimensional terminal varieties were classified in detail. Fujino proved that canonical rings of compact Kahler manifolds are finitely generated. Several results for symplectic varieties, moduli theory were obtained in our research projects. Mathematical foundations of Quantum cohomology rings were developed by the group of Fukaya, Ono and others. Several developments of mirror symmetry, including the case of toric Calabi-Yau varieties, are obtained. We also obtained several important results on derived categories of sheaves on algebraic varieties.

研究分野：代数学

キーワード：可積分系 パンルヴェ方程式 相空間 モジュライ空間 モノドロミー保存変形 量子コホモロジーとミラー対称性 リーマン・ヒルベルト対応 Floer 理論

1. 研究開始当初の背景

研究代表者等のパンルヴェ方程式の相空間の代数幾何学的研究から、確定特異点のみを持つ放物接続のモジュライ空間の構成、リーマン・ヒルベルト対応の基本的性質が厳密に示され、対応する接続のモノドロミー保存変形から得られる非線形微分方程式系の幾何学的パンルヴェ性を確立した。一方、高次元代数幾何の森理論や極小モデル理論の進展により、高次元多様体の精密な解析が可能になってきたが、放物接続や Higgs 束のモジュライ空間の精密な構造の解析も可能になりつつあった。数理論理に源をもつ種々の量子不変量の数学的な基礎付けが進んでいるが、種々の量子不変量の相関関数について、ミラー対称性や Witten 予想について様々な角度から新しい研究が行われており、更なる理論の深化が期待されていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、可積分系の相空間をモジュライ理論により定式化し、モノドロミー保存変形の幾何学を確立する事である。特に、分岐・不分岐の不確定特異点を持つ接続、特殊なスペクトル型を固定した接続の場合に理論を拡張する事が目的である。さらに相空間の構造を森理論や極小モデル理論などの高次元代数幾何学的手法によって明らかにし、可積分系と代数幾何を融合した精密な理論を構築する。代数曲線上の接続や Higgs 場のモジュライ空間とその自然なコンパクト化の代数多様体の構造を精密に解析する方法を確立し、幾何学的ラグランズ予想の証明への足掛かりを得る。また、種々の量子不変量をモジュライ空間の幾何学として理解し、相関関数に関するミラー対称性等の予想の数学的背景を明らかにする。

3. 研究の方法

研究組織に属する個々の研究者が各自の問題意識のもとで研究を進めつつ、分野内・分野横断のセミナー、研究集会などを組織し、代数幾何学と可積分系の最新結果について、相互理解を深める事に重点を置き研究を進める。併せて、当該分野の国内外の専門家と共同研究し、研究を推進する。

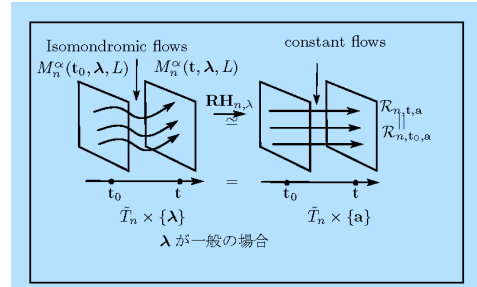
4. 研究成果

現在までの成果を次の3つの研究課題ごとに分けて述べる。

- (1)モノドロミー保存変形の幾何学の確立。
- (2)高次元双有理幾何学の研究と可積分系への応用。
- (3)種々の量子不変量とモジュライ空間、ミラー対称性の数学的理解。

研究課題(1)については、放物接続のモジュライ空間の構成、リーマン・ヒルベルト対応の基本的性質の証明について、スペクトル型を

固定した場合、また一般の不分岐の不確定特異点を持つ場合について、稲場・齋藤により確立された。Generic な分岐する不確定特異点の場合には、稲場がモジュライ空間の構成に成功し、プレプリントをアーカイブに掲載した。一般化されたリーマン・ヒルベルト対応の記述は現在進行中である。



リーマン・ヒルベルト対応とモノドロミー保存変形

望月は混合ツイスター D 加群の理論を整備し、大部の著書を出版した。また Kontsevich 複体や GKZ-超幾何系について応用した。また、インスタントンやモノポールの特異性と調和バンドルの漸近挙動の関係に関する研究を行った。コンパクトリーマン面上の調和バンドルの自然な変形族の漸近挙動の研究を行い、Katzarkov-Noll-Pandit-Simpson による予想を解決した。齋藤と S.Szabo は、接続や Higgs 束のモジュライ空間に対し、見かけの特異点による標準座標の一般理論を構築した。近日論文として発表する予定である。F. Loray と齋藤の共同研究により、パンルヴェ VI 型方程式の場合の結果を拡張し、ガルニエ系に関わる接続のモジュライ空間上に2方向のラグランジュファイブレーションが存在し、それが横断である事が示された。この結果は、幾何学的ラグランズ対応との関係について興味深く今後の更なる研究が期待される。山田・野海は、パデ近似による E8 型の楕円差分パンルヴェ方程式のより簡単なラックス形式を得た。また、梶原・野海・山田は、離散パンルヴェ方程式の幾何学的な取り扱いについてレビューを出版した。山田は名古屋と量子パンルヴェ方程式のラックス形式を構成しアフィンワイル群対称性を定式化した。太田は、種々の方程式系の解析および応用研究を行った。小池は WKB 解析およびその応用の研究を行った。原岡は、多変数の完全積分系と rigid 局所系について研究した。岩崎は、超幾何関数の特殊値公式について隣接関係に注目した研究を行った。ラスマンは可積分系の理論を用いて、離散的の曲面論を研究した。

研究課題(2)については、森は Prokhorov と端末的3次元射影多様体の端収縮射の分類を行った。吉岡・Markman は、一般 Kummer シンプレクテック多様体の川又・Morrison 予想を示した。藤野は、コンパクトケーラー多様体の標準環が有限生成であるという基本的な結果を得た。並河は、symplectic variety

に関連したポアソン変形と双有理幾何について研究した。向井は、有限単純群の作用する Enriques 曲面について精密な結果を得た。松下は、ラグランジュアンファイブレーションを持つ既約シンプレクティック多様体の研究を行った。戸田は Bridgeland 安定性条件と極小モデルとの関連を明らかにした。三井の主等質空間の一般整環型上のモデルに関する研究を、佐野は Q-Fano 多様体の変形、カラビ・ヤウ多様体の研究を行った。

研究課題(3)については、小野は、深谷, Oh, 太田との共同研究により、倉西構造と仮想基本類の理論を用いて量子コホモロジーの基礎理論を整備し、ミラー対称性の数学的な理解を目指している。この理論の応用としてコンパクトケーラートーリック多様体の量子 cohomology 環と potential function の Jacobi 環の同型を示し、それが半単純になる場合に双方の pairing を比較した。中島は、インスタントンのモジュライ空間の交叉コホモロジー群が W 代数の表現の構造を持つ事を示した。細野は、「ホモロジー論的射影双対」という概念を導入し、導来圏同値であるが双有理同値でないカラビ・ヤウ多様体について研究した。代数多様体の接続層の導来圏の研究も大きく進展した。吉岡, 阿部, 入谷, 石井, 戸田らがそれぞれの観点から研究を行い、大きな成果を上げた。入谷は、高種数のグロモフ・ウィッテン理論における Fock 層の理論の基礎付けを行い、トーリック軌道体に対するミラー定理を証明した。望月は、混合ツイスター D 加群の理論を用いて、弱 Fano トーリック多様体のミラー対称性に関する Givental 同型から局所ミラー対称性に付随する量子 D 加群の同型が得られる事を示した。戸田は、最近のプレプリントで細野・齋藤・高橋が提案した Gopakumar-Vafa 予想に現れる BPS 不変量の定義を精密化し、カラビ・ヤウ多様体の変形によらない一般的な定義を得た。金子はレベル 2 の二重ゼータ値とモジュラー形式との関係を調べた。谷口は、概均質ベクトル空間のゼータ関数の整数論的研究を行った。

ホームページを整備し、研究集会セミナー情報を MathCalendar に掲示し、研究者の情報共有を行った。(下記参照)

2016年12月

Sun	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat
					2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

2012-2016 年度の研究期間において、19 回(年平均約 4 回)の国際研究集会もしくはワークショップを開催した。そのうち 2 回は、ベ

ルギーと台湾で共催した 2016 年 12 月には、神戸大学で国内外の第一線研究者を集めて国際研究集会「Algebraic Geometry and Integrable Systems, Kobe 2016」を開催し、本研究課題の研究の総括を行った。(下記参照)。



5. 主な発表論文等

(雑誌論文)(計 160 件)

M.-a. Inaba, M.-H. Saito, Moduli of regular singular parabolic connections with given spectral type on smooth projective curves, accepted in Journal of Math. Soc. of Japan, 査読有, 2017.

K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, Geometric aspects of Painlevé equations, J. Phys. A, 査読有, 50 (2017), no. 7, 073001, 164 pp, 査読有

DOI:10.1088/1751-8121/50/7/073001
T. Mochizuki, Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces, J. Topol. 査読有, 9 (2016), no. 4, 1021-1073.

DOI:10.1112/jtopol/jtw018
K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, K. Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds, Astérisque, 査読有, no. 376 (2016), vi+340.

S. Mori, Yu G. Prokhorov, Threefold extremal contractions of type (IIA). Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 査読有, 80 (2016), no. 5, 77-102.

DOI: https://doi.org/10.4213/im8516
E. Markman, K. Yoshioka, A proof of the Kawamata-Morrison cone conjecture for holomorphic symplectic varieties of K3[n] or generalized Kummer deformation type, Int. Math. Res. Not., 査読有, IMRN 2015, no. 24, 13563-13574.

DOI: 10.1093/imrn/rnv119
F. Loray and M.-H. Saito, Lagrangian Fibrations in Duality on Moduli Spaces of Rank 2 Logarithmic Connections Over the Projective Line, Int. Math. Res. Not., 査読有, IMRN 2015 no.4,

995-1043
DOI:10.1093/imrn/rnt232
K. Yoshioka, Perverse coherent sheaves and Fourier-Mukai transforms on surfaces II., Kyoto J. of Math., 査読有, 55 (2), 2015, 365-459
DOI:10.1215/21562261-2871785
H.Nagoya, Y. Yamada, Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations, Ann. Henri Poincaré, 査読有, 15, 2014, 313-344
DOI:10.1007/s00023-013-0237-9
M.-a. Inaba, M.-H. Saito, Moduli of unramified irregular singular parabolic connections on a smooth projective curve, Kyoto J. of Math., 査読有, 53 (2), 2013, 433-482.
<http://projecteuclid.org/euclid.kjm/1369071235>

[学会発表](計 344 件)

M.-H. Saito, Geometry of moduli spaces of parabolic connections and Higgs bundles and their relation to Integrable Systems, Complex Analytic Geometry, Mumbai (インド), 2017 年 3 月 29 日

M.-H. Saito, An Explicit Geometry of Moduli Spaces of Higgs Bundles and Singular, Connections on a Smooth Curve and Differential Equations of Painlevé Types, AMS von Neumann Symp., 2016 年 7 月 7 日, Charlotte(U.S.A.)

齋藤政彦, 接続のモジュライ空間とパンルヴェ型方程式, 日本数学会代数学賞受賞特別講演, 日本数学会 2016 年度年会, 筑波大学(茨城県・つくば市), 2016 年 3 月 18 日

K. Yoshioka, "Fourier-Mukai duality for K3 surfaces", Vector bundles on algebraic curves 2015, Warwick University, Coventry (U.K.), 2015 年 6 月 16 日.

Y.Yamada, Geometric introduction to discrete Painlevé equations, Needs 2015, Santa Margherita di Pula (Italy), 2015 年 5 月 26 日

T. Mochizuki, "Wild harmonic bundles and twistor D-modules", Plenary Talk, International Congress of Mathematicians, COEX, Seoul (韓国), 2014 年 8 月 20 日

Y. Ohta, Rogue Waves for Some Soliton Equations, SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures, Cambridge (U.K.), 2014 年 8 月 13 日

M. Noumi, Padé approximations and hypergeometric series, 2014 Joint Mathematical Meeting, Baltimore

Convention Center, Baltimore (U.S.A.), 2014 年 1 月 18 日

[図書](計 9 件)

O. Fujino, S. Kondo(Chief), A. Moriwaki, M.-H. Saito, K. Yoshioka, Mathematical Society of Japan, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 69, Development of Moduli theory, Proceedings of The 6th MSJ-SI, 2016, xiv+537pp.

戸田幸伸, 数学書房, 接続層の導来圏に関わる諸問題(シリーズ:問題・予想・原理の数学/加藤文元, 野海正俊編), 2016, 275pp.

T. Mochizuki, Springer - Verlag, Lecture Notes in Mathematics, vol.2125, Mixed Twistor D-modules, 2015, xx+487pp.

原岡喜重, 数学書房, 複素領域における線形微分方程式, 2015, 363pp + xv

[その他]

ホームページ等

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~mhsaito/ftop-j.html>

アウトリーチ活動

齋藤政彦, 接続のモジュライ空間とパンルヴェ型方程式, 科研費ニュース, p.9, 2016 VOL4.p.9.

研究代表者、研究分担者、連携研究者の主な受賞について

- 2014 年日本数学会春季賞 戸田幸伸
- 2014 年世界数学会会議 (ICM) ソウル, 全体講演者 望月拓郎
- 2016 年日本数学会春季賞 入谷寛
- 2016 年日本数学会代数学賞 齋藤政彦
- 2016 年度朝日賞 中島啓

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤 政彦 (SAITO, Masa-Hiko)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80183044

(2) 研究分担者

野海 正俊 (NOUMI, Masatoshi)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80164672

吉岡 康太 (YOSHIOKA, kota)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 40274047

山田 泰彦 (YAMADA, Yasuhiko)
神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00202383

太田 泰広 (OHTA, Yasuhiro)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10213745

望月 拓郎 (MOCHIZUKI, Takuro)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：10315971

(3) 連携研究者

野呂 正行 (NORO, Masayuki)
立教大学・理学部・教授
研究者番号：50332755

小池 達也 (KOIKE, Tatsuya)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80324599

稲場 道明 (INABA, Michi-aki)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80359934

森 重文 (MORI, Shigefumi)
京都大学・高等研究院・特別教授
研究者番号：00093328

向井 茂 (MUKAI, Shigeru)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：80115641

岩崎 克則 (IWASAKI, Katsunori)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：00176538

金子 昌信 (KANEKO, Masanobu)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：70202017

原岡 喜重 (HARAOKA, Yoshishige)
熊本大学・大学院先端科学研究部・教授
研究者番号：30208665

並河 良典 (NAMIKAWA, Yoshinori)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80228080

石井 亮 (ISHII, Akira)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10252420

藤野 修 (FUJINO, Osamu)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：60324711

細野 忍 (HOSONO, Shinobu)
学習院大学・理学部・教授
研究者番号：60212198

松下 大介 (MATSUSHITA, Daisuke)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：90333591

阿部 健 (ABE, Takeshi)
熊本大学・大学院先端科学研究部・准教授
研究者番号：90362409

入谷 寛 (IRITANI, Hiroshi)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：20448400

戸田 幸伸 (TODA, Yukinobu)
東京大学・国際高等研究所力ブリ数物連携
宇宙研究機構・特任准教授
研究者番号：20503882

中島 啓 (NAKAJIMA, Hiraku)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00201666

中村 郁 (NAKAMURA, Iku)
北海道大学・名誉教授
研究者番号：50022687

谷口 隆 (TANIGUCHI, Takashi)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60422391

小野 薫 (ONO, Kaoru)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：20204232

ラスマン ウェイン (ROSSMAN, Wayne)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50284485

三井 健太郎 (MITSUI, Kentaro)
神戸大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：70644889

佐野 太郎 (SANO, Taro)
神戸大学・大学院理学研究科・特命助教
研究者番号：10773195