

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 11 月 2 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340005

研究課題名(和文) 数論的位相幾何学の展開と数論的場の理論

研究課題名(英文) Development of arithmetic topology and arithmetic quantum field theory

研究代表者

森下 昌紀 (Morishita, Masanori)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：40242515

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,600,000円

研究成果の概要(和文)：結び目と素数の類似性に基づき、数論的位相幾何学について研究した。・1の m 乗根を含む代数体の有限個の素イデアルたちがlink typeであるという概念を導入し、link typeな S に対し、べき剰余記号及びRedeiのトリプル記号の一般化となる多重べき剰余記号を導入した。特に、円の3分体上のトリプル記号について具体的な構成を与えた。・Galois表現に対するSelmer加群と付随する代数的 p 進 L 関数の類似として、結び目群の $SL(2)$ 表現の変形に対するSelmer加群及び付随する L 関数の類似物を導入し、具体例においてMazurにより提起された問題を肯定的に解決した。

研究成果の概要(英文)：Based on the analogies between knots and primes, I studied arithmetic topology.・We introduced the notion for S , which is a finite set S of primes of a number field containing a primitive m -th root of unity, to be link type. Then we introduce the multiple power residue symbols for such an S which generalize the power residue symbols and the Redei triple symbols. In particular, we constructed the triple symbols over the cubic cyclotomic field. I wrote the joint paper with Fumiya Amano on this work (submitted).・Following the analogies with Selmer module and the associated algebraic p -adic L -function for deformations of a Galois representation, we introduced the Selmer module and the associated L -function for deformations of a $SL(2)$ -representation of a knot group, and gave an affirmative answer to Mazur's problem for some concrete examples. I wrote the joint paper with Takahiro Kitayama, Ryoto Tange, Yuji Terashima on this work (submitted).

研究分野：数論的位相幾何学

キーワード：結び目 素数 3次元多様体 代数体

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、1998年から1999年にかけて、数体の分岐条件付き Galois 群の位相幾何的な考察により、素数と結び目の類似性を発見した。以来 10 数年にわたり、数論と結び目理論・3次元トポロジーの類似性について相互啓発的な研究を行い、数論的位相幾何 (Arithmetic Topology) と呼ばれる新しい分野を創始した。その基礎付けた研究成果は著書

M. Morishita, Knots and Primes -- An Introduction to Arithmetic Topology, Universitext, Springer, 2012

に纏められた。米国ハーバード大学の数学教室で、2012年夏に上記著書をテキストにしたコースが開講されるなど、世界各地の大学においてセミナー等のテキストとしてこの著書が使われている。

最近では、数論的位相幾何学は数理物理学との具体的な関係にまでその幅・奥行きを広げてきている。

以上が、研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

上記の著書は、代数的数論と3次元トポロジーの基本的な概念・理論の間の類似性を明確に纏めたもので、数論的位相幾何学の基礎付けた研究における初期的な成果といえる。その後、主に代表者の大学院生らが著書の結果を補充・拡張する成果を挙げている。

以上の背景と成果を踏まえ、数論的位相幾何学の整備、深化および数理物理学、特に場の理論との関連性を研究することが本研究課題である。

本研究はもともと研究代表者の独自のアイデアにより創始された数論とトポロジーを横断する新しい研究分野である。問題が豊富にあり、どのような方向性があるか、代表者自身が一番よくわかっている。すでに、数論の古典的な問題への新しいアプローチ、数論のアイデアによる結び目理論への新しい方法の開拓などの貢献もあるが、今後、上述の研究目標を遂行することにより、数論と幾何学及び数理物理に新しい視点と知見をもたらすことを目的とする。

3. 研究の方法

本研究は、数論と低次元トポロジー及び数理物理の間の横断的研究であり、研究遂行にはこれらの分野の専門的知識・技術が必要とされる。研究代表者は、広い視野からの問題意識のもと、専門的知識・技術をもつ連携研究者らとの議論及び大学院生の指導を通じ、独自の総合的思索により研究を遂行する計画である。これら日々の研究の刺激剤、総括として、毎年、国際研究集会「Low dimensional topology and number theory」を主催し、

国内外の研究者との交流の促進に努める。具体的な研究計画・方法は次の通りである。

Redei トリプル記号の拡張として、代数体の素イデアルたちに対し、Milnor 不変量と多重べき剰余記号を導入する。

Galois 表現の変形理論の数論の結び目理論における類似を構築する。また、肥田理論と3次元双曲幾何、Chern-Simons 理論に関しては、Chern-Simons 不変量の数論的類似物の研究をする。

導来圏を用いた一般化された岩澤理論 (主予想) の定式化をモデルとして、位相幾何学における Reidemeister トーションの理論を導来圏の言葉で拡張・定式化する。

代数体の数論における Galois 加群構造の理論はイデール類体論の格好の応用題材である。従って、3次元多様体に対するイデール類体論を用いて、3次元多様体における Galois 加群構造の理論の類似を樹立する。

非可換類体論 (Langlands 対応) と3次元位相的場の理論の類似性、伊原理論と2次元共形場理論の関係の観点から、数論における Langlands 対応と伊原理論の関係を研究する。

毎年3月に国際研究集会「Low dimensional topology and number theory」を主催する。毎年外国から数名の研究者を招聘し、研究交流を行い、本研究課題を推し進める計画である。そのために、科学研究費を活用する。

4. 研究成果

(1) 写像類に対する Johnson 準同形の類似を非アーベル岩澤理論の枠組みで構成し、Galois コホモロジーにおける Massey 積で解釈した。これについて寺嶋郁二氏との共著論文1編を著した。

(2) Galois 表現の変形理論の類似を結び目群の $SL(2)$ 表現に対して構成し、2橋結び目群に対して具体例を与えた。これについて高倉裕氏、寺嶋郁二氏、植木潤氏との共著論文1篇を著した。

(3) Galois 表現に対する Selmer 加群と付随する代数的 p 進 L 関数の類似として、結び目群の $SL(2)$ 表現の変形に対する Selmer 加群及び付随する L 関数の類似物を導入し、具体例において Mazur により提起された問題を肯定的に解決した。これについて北山貴裕氏、丹下稜斗氏、寺嶋郁二氏との共著論文1篇を著した。

(4) 1 の m 乗根を含む代数体の有限個の素イデアルたち S が link type であるという概念を導入し、link type な S に対し、 $\text{mod } m$ Milnor 不変量 (高次まつわり数) を導入した。これより、べき剰余記号及び Redei のトリプル記号の一般化となる多重べき剰余記号を導入した。特に、

円の3分体上のトリプル記号について具体的な数論的構成を与えた。これについて天野郁弥氏との共著論文1篇を著した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

M. Morishita, Y. Terashima, p-Johnson maps in non-Abelian Iwasawa theory, arXiv:1311.5982, 2013.

M. Morishita, Y. Takakura, Y. Terashima, J. Ueki, On the universal deformations for SL_2 -representations of knot groups, to appear in Tohoku Math. J.

T. Kitayama, M. Morishita, R. Tange, Y. Terashima, On certain L-functions for deformations of knot group representations, To appear in Transactions of the American Mathematical Society.

F. Amano, M. Morishita, Arithmetic Milnor invariants and multiple power residue symbols in number fields, arXiv:1412.6894, 2014.

[学会発表] (計10件)

M. Morishita, Johnson maps in non-Abelian Iwasawa theory, Low dimensional topology and number theory 2012年8月

ドイツ Oberwolfach 研究所

M. Morishita, Knots and Primes - An Introduction to Arithmetic Topology, Japan-Taiwan conference on number theory 2012年9月
台湾 National Center for Theoretical Sciences

森下昌紀, Redei 記号の多重化と Maass 波動形式, 非 Abel 岩澤理論における Johnson 写像, 北陸数論研究集会

2012年12月
金沢サテライトプラザ

森下昌紀, Johnson maps in non-Abelian Iwasawa theory, 早稲田整数論研究集会 2013年3月

早稲田大学理工学部

M. Morishita, Johnson maps in non-Abelian Iwasawa theory,

Number theory and related topics in honor of Takashi Ono, 2013年4月
米国 Johns Hopkins University

M. Morishita, Milnor invariants for primes and Maass wave forms, Quantum Topology and Hyperbolic Geometry, 2013年5月
Nha Trang, Vietnam

森下昌紀, 結び目理論と整数論 - 数論的位相幾何学, ENCOUNTERwithMATHEMATICS, 2013年5月
中央大学

M. Morishita, Johnson-Kawazumi maps in non-Abelian Iwasawa theory I, II, Johnson homomorphisms, 2013年6月6,7日, 東京大学

森下昌紀, Zassenhaus filtration and Johnson homomorphisms in non-Abelian Iwasawa theory (寺嶋郁二氏との共同研究), 結び目不変量とゼータ関数, 香川セミナー, 2013年10月17日,
香川大学,

森下昌紀, Arithmetic Milnor invariants and multiple power residue symbols in number fields (天野郁弥氏との共同研究) 研究集会「代数的整数論とその周辺」 2014年12月2日,
京都大学数理解析研究所

[その他]

研究集会主催
Workshop "Low dimensional topology and number theory IV" 主催,
福岡, 2012年, 3月.

Workshop "Low dimensional topology and number theory V" 主催,
福岡, 2013年, 3月.

Workshop, "Modular functions and Quadratic forms -- Number theoretic delights" 組織委員,
大阪, 2013年12月.

Workshop "Low dimensional topology and number theory VI" 主催,
福岡, 2014年, 3月.

Workshop "Low dimensional topology and number theory VII" 主催,
福岡, 2015年, 3月.

研究組織

(1) 研究代表者

森下 昌紀 (Morishita,Masanori)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：40242515

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

寺嶋 郁二 (Terashima ,yuji)