

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 22 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24340012

研究課題名(和文) 結び目と3次元多様体のトポロジー

研究課題名(英文) Topology of knots and 3-manifolds

研究代表者

大槻 知忠(Ohtsuki, Tomotada)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50223871

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,900,000円

研究成果の概要(和文)：筆者は、いくつかの双曲結び目に対して、Kashaev不変量の漸近展開を精密に計算し、これらの結び目に対して、体積予想を証明した。また、筆者は、8の字結び目を整数係数手術して得られる3次元双曲多様体に対して「3次元多様体の体積予想」を証明した。筆者は、各年度に数理解析研究所において研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」を開催した。また、筆者は平成26年度と27年度に「トポロジーシンポジウム」を開催した。また、研究分担者の谷山公規氏・茂手木公彦氏・大山淑之氏は、各年度に研究集会「結び目の数学」を開催した。

研究成果の概要(英文)：The author calculated the asymptotic expansion of the Kashaev invariant for some hyperbolic knots, and proved the volume conjecture for these knots. Further, the author proved "the volume conjecture for 3-manifolds" for hyperbolic 3-manifolds obtained by integral surgery along the figure-eight knot. The author held the workshop "Intelligence of Low-dimensional Topology" at RIMS in each year. Further, the author held the topology symposium in 2014 and 2015. Furthermore, Taniyama, Motegi and Ohyama held the workshop "Musubime no Sugaku (Mathematics of Knots)" in each year.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目 3次元多様体 不変量 低次元トポロジー 量子トポロジー

### 1. 研究開始当初の背景

3次元の位相幾何学において、1980年代以来、Chern-Simons 理論にもとづいて膨大な数の不変量(量子不変量)が発見され、不変量の研究、すなわち、結び目の集合と3次元多様体の集合の研究という新しい研究領域がもたらされた。1990年代に、結び目の量子不変量は Kontsevich 不変量に統一され、筆者等によって3次元多様体の摂動的な不変量や LMO 不変量が導入されたが、結び目や3次元多様体の分類問題の観点から、量子不変量とそれに関連する不変量の研究が重要であるとおもわれる。また、幾何構造による3次元多様体の分類理論が近年完成し、その観点から、量子不変量と双曲幾何の関係性を記述する体積予想の研究も重要であるとおもわれる。

### 2. 研究の目的

3次元多様体の量子不変量、摂動的な不変量、LMO 不変量や結び目の量子不変量、Kontsevich 不変量について、双曲幾何等の関連する話題にも留意して、研究をすすめ、この分野の研究を発展させることが、本研究の目的であった。それらの不変量は、数理解析的には、Chern-Simons 経路積分を用いて表される。双曲幾何との関連の観点から体積予想の研究が重要であると筆者は考えているが、体積予想は、数理解析的には Chern-Simons 経路積分に対して無限次元の鞍点法を形式的に適用することによって導かれ、その摂動展開には双曲体積や Reidemeister ねじれが現れる。それらの不変量の関連を研究することが重要であると筆者は考えた。

### 3. 研究の方法

筆者は Kashaev 不変量の漸近展開をいくつかの双曲結び目について具体的に計算することをめざした。Chern-Simons 経路積分の摂動展開が示唆しているように、Kashaev 不変量の漸近展開の最初の項は双曲体積で与えられることが予想されており(体積予想)、その次の項(準古典極限の項)は Reidemeister ねじれが与えることが予想される。筆者は、それらの場合についてその予想を証明することをめざした。また、近年、3次元多様体の体積予想が定式化されており、筆者は、いくつかの閉3次元双曲多様体について、その定式化に基づいてその量子不変量の漸近挙動を具体的に計算することをめざした。また、この分野の研究を今後さらに発展させるために、筆者は、各年に、数理解析研究所において研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」を開催することを計画した。また、各年に、研究分担者の谷山公規氏、茂手木公彦氏、大山淑之氏が研究集会「結び目の数学」を開催することを計画した。また、筆者は本研究の連携研究者の葉廣和夫氏と共同で、数理解析研究所において低次元トポロジーセミナーを継続的に開催

することをめざした。

### 4. 研究成果

結び目の Kashaev 不変量の漸近展開について、筆者は、7交点以下の双曲結び目について、この展開を具体的に計算し、体積予想が成り立つことを証明した(6交点結び目の場合は、横田佳之氏との共同研究)。漸近展開の計算において、従来の研究で懸案になっていた「和を積分で近似する部分」は Poisson 和公式を用いることで計算を実行し、「多変数の鞍点法の部分」は積分領域を移動するホモトピーを具体的に与えることにより計算を実行した。また、筆者は、高田敏恵氏との共同研究で、双曲2橋結び目(7交点以下のすべての双曲結び目を含む)に対してこの漸近展開の準古典極限が Reidemeister ねじれで与えられることを証明した。さらに、筆者は、最近定式化されている「3次元多様体の体積予想」について、8の字結び目を整数係数手術して得られる3次元双曲多様体に対して、その定式化による体積予想を証明した。これらの研究成果に関連して、筆者は、2015年9月に東京大学の国際研究集会で招待講演をし、2016年9月に早稲田大学の国際研究集会で招待講演をした。また、これらの研究成果と関連して、筆者は量子トポロジーにおける結び目の不変量についての著書「結び目の不変量」(共立出版、2015年に出版)を執筆した。筆者は、各年の5月に、京都大学数理解析研究所において、研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」を開催した。この研究集会において、筆者は problem session を企画し、その成果として未解決問題集を編集して、数理解析研究所講義録の一部として出版した。また、研究集会「結び目の数学」について、2012年12月に研究分担者の谷山公規氏が早稲田大学において開催し、2013年12月に研究分担者の茂手木公彦氏が日本大学において開催し、2014年12月に研究分担者の大山淑之氏が東京女子大学において開催し、2015年12月に研究分担者の谷山公規氏が早稲田大学において開催した。また、筆者は、トポロジーシンポジウムを、世話人の1人として、2014年7月に東北大学において開催し、2015年8月に名古屋工業大学において開催した。また、筆者は、本研究の連携研究者の葉廣和夫氏と共同で、京都大学数理解析研究所において、低次元トポロジーセミナーを開催した。これらの研究集会やシンポジウムやセミナーは申請者や研究分担者や連携研究者との共同研究をすすめるにあたって、また、大学院生等の若手研究者との研究交流の面からも、大変有益であった。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

- (1) T. Ohtsuki, On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the  $5_2$  knot, *Quantum Topology* 7 (2016) 669--735. 査読あり  
DOI: 10.4171/QT/83
- (2) T. Ohtsuki (ed.), Problems on Low-dimensional Topology 2016, *RIMS Kokyuroku* 2004 (2016) 115--129. 査読なし  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2004.html>
- (3) T. Ohtsuki, T. Takata, On the Kashaev invariant and the twisted Reidemeister torsion of two-bridge knots, *Geometry and Topology* 19 (2015) 853--952. 査読あり  
DOI 10.2140/gt.2015.19.853
- (4) T. Ohtsuki (ed.), Problems on Low-dimensional Topology 2015, *RIMS Kokyuroku* 1960 (2015) 112--123. 査読なし  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1960.html>
- (5) S. Kamada, V. Lebed, K. Tanaka, The shadow nature of positive and twisted quandle cocycle invariants of knots, *J. Knot Theory Ramifications*, 24 (2015), 1540001 (15 pages) 査読あり  
DOI: 10.1142/S0218216515400015
- (6) Y. Joung, S. Kamada, S. Y. Lee, Applying Lipson's state models to marked graph diagrams of surface-links, *J. Knot Theory Ramifications*, 24 (2015), 1540003 (18 pages), 査読あり  
DOI: 10.1142/S0218216515400039
- (7) H. Endo, S. Kamada, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, *Topology Appl.*, 196 (2015), 416--430, 査読あり  
DOI: 10.1016/j.topol.2015.05.015
- (8) J. S. Carter, S. Kamada, Three-dimensional braids and their descriptions, *Topology Appl.*, 196 (2015), 510--521, 査読あり  
DOI: 10.1016/j.topol.2015.05.012
- (9) H. Endo, I. Hasegawa, S. Kamada, K. Tanaka, Charts, signatures, and stabilizations of Lefschetz fibrations, *Geom. Topol. Monogr.*, 19 (2015), 237--267, 査読あり  
DOI: 10.2140/gtm.2015.19.237
- (10) T. Ohtsuki (ed.), Problems on Low-dimensional Topology 2014, *RIMS Kokyuroku* 1911 (2014) 130--149. 査読なし  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1911.html>
- (11) K. Taniyama, Mapping a knot by a continuous map, *J. Knot Theory Ramifications*, 23, 1450052 (2014) [14 pages], 査読あり  
DOI: 10.1142/S0218216514500527
- (12) K. Habiro, T. Widmer, On Kirby calculus for null-homotopic framed links in 3-manifolds, *Algebr. Geom. Topol.* 14 (2014) 115-134 査読あり  
DOI: 10.2140/agt.2014.14.115
- (13) A. Beliakova, Z. Guliyev, K. Habiro, A. D. Lauda, Trace as an alternative decategorification functor, *Acta Mathematica Vietnam.* 39 (2014) 425-480 査読あり  
DOI 10.1007/s40306-014-0092-x
- (14) T. Ohtsuki (ed.), Problems on Low-dimensional Topology 2013, *RIMS Kokyuroku* 1866 (2013) 135--148. 査読なし  
<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/194236>
- (15) M. Sakamoto, K. Taniyama, Plane curves in an immersed graph in  $\mathbb{R}^2$ , *J. Knot Theory Ramifications*, 22, (2013) 1-10, 査読あり  
DOI: 10.1142/S021821651350003X
- (16) T. Kuriya, T. T. Q. Le, T. Ohtsuki, The perturbative invariants of rational homology 3-spheres can be recovered from the LMO invariant, *J. Topology* 5 (2012) 458--484. 査読あり  
doi: 10.1112/jtopol/jts010
- (17) T. Ohtsuki (ed.), Problems on Low-dimensional Topology 2012, *RIMS Kokyuroku* 1812 (2012) 119--135. 査読なし  
<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/194182>

- (18) K. Taniyama, Multiplicity of a space over another space, *J. Math. Soc. Japan*, 64, 2012, 823–849, 査読あり  
DOI: 10.2969/jmsj/06430823
- (19) S. Kamada, Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization, *Topology Appl.* 159 (2012), no. 4, 1041–1051. 査読あり  
DOI: 10.1016/j.topol.2011.11.031
- (20) N. Kamada, S. Kamada, Biquandles with structures related to virtual links and twisted links, *J. Knot Theory Ramifications* 21 (2012), no. 13, 1240006, 14 pp. 査読あり  
DOI: 10.1142/S0218216512400068
- [学会発表] (計 19 件)
- (1) T. Ohtsuki, On the asymptotic expansion of the quantum  $SU(2)$  invariant at  $q = \exp(4\pi i/N)$  for closed hyperbolic 3-manifolds obtained by integral surgery along the figure-eight knot, Volume conjecture and quantum topology, 早稲田大学 (東京都新宿区)、2016年9月6日.
- (2) S. Kamada, Tensor products of quandles and classification of 1-handles, AMS Special Session on “Knots in Washington (State)”, USA, 2016年1月7日.
- (3) S. Kamada, On braid description of surface-links in the 4-space, The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, Min Nan Normal University, Zhangzhou, China, 2015年11月27日.
- (4) K. Taniyama, Totally close spatial embeddings of a graph, AMS Sectional Meeting AMS Special Session, Fullerton (USA), 2015年10月25日.
- (5) T. Ohtsuki, On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of some hyperbolic knots, Braids, Configuration Spaces and Quantum Topology, 東京大学 (東京都目黒区)、2015年9月7日.
- (6) K. Habiro, Functors on Lagrangian cobordisms associated to ribbon Hopf algebras, New Developments in TQFT, Aarhus University, Denmark, 2015年7月30日.
- (7) K. Habiro, Trace and categorification, Categorification in Algebra, Geometry and Physics, Institut d’Etudes Scientifiques de Cluses, France, 2015年5月6日.
- (8) S. Kamada, Quandle presentation of 1-handles attached to surface-knots, East Asian School of Knots and Related Topics, East China Normal University, Shanghai, China, 2015年1月28日.
- (9) K. Taniyama, Site-specific Gordian distances of spatial graphs, Conference on Knot Theory and Its Applications to Physics and Quantum Computing, University of Texas at Dallas (USA), 2015年1月7日.
- (10) 大槻知忠, 結び目の Kashaev 不変量の漸近展開について、多様体のトポロジーの展望、東京大学 (東京都目黒区)、2014年11月28日.
- (11) S. Kamada, Hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilizations (joint work with Hisaaki Endo), Knots and Low Dimensional Manifolds, BEXCO Convention Center, Busan, Korea, 2014年8月25日.
- (12) K. Habiro, Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, Modern Trends in Topological Quantum Field Theory, Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, University of Vienna, Austria, 2014年2月21日.
- (13) S. Kamada, Surface knots I: how to visualize 4-space, motion picture method and normal forms, Surface knots II: Surface diagrams and invariants, Surface knots III: Braid forms, Advanced School, Knot Theory and Its Applications, IISER Mohali, Punjab, India, 2013年12月12, 13, 14日.
- (14) S. Kamada, Charts for 3-dimensional braids, Algebraic Structures in Knot Theory III, Western Fall Sectional Meeting, AMS, University of California at Riverside, (Riverside, California, USA), 2013年11月3日.

- (15) K. Taniyama, Plane curves in an immersed graph in  $\mathbb{R}^3$ , International Workshop on Spatial Graphs 2013, 東京女子大学 (東京都杉並区)、2013 年 8 月 14 日.
- (16) K. Habiro, Category-theoretic structures in 3-dimensional topology, Mini-courses before the conference "Quantum topology and hyperbolic geometry", Institute of Mathematics, Hanoi, Vietnam, 2013 年 5 月 6~10 日.
- (17) S. Kamada, Three dimensional braids and their braid monodromies, East Asian School of Knots and Related Topics, 東京大学 (東京都目黒区), 2013 年 1 月 16 日.
- (18) S. Kamada, Branched coverings and braided manifolds of low dimensions, Knots in Washington, George Washington University (Washington, DC, USA), 2012 年 12 月 9 日.
- (19) S. Kamada, Graphical description of branched coverings and 2-dimensional braids (joint work with Scott Carter), European Congress of Mathematics, Jagiellonian University (Krakow, Poland), 2012 年 7 月 6 日.

[図書] (計 2 件)

- (1) 大槻知忠、結び目の不変量、共立出版、2015 年、277 ページ.
- (2) 鎌田聖一、曲面結び目理論、シュプリンガー現代数学シリーズ、丸善出版、2012 年、247 ページ.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

大槻 知忠 (OHTSUKI, Tomotada)  
 京都大学・数理解析研究所・教授  
 研究者番号：5 0 2 2 3 8 7 1

### (2) 研究分担者

谷山 公規 (TANIYAMA, Kouki)  
 早稲田大学・教育総合科学学術院・教授  
 研究者番号：1 0 2 4 7 2 0 7

(3) 研究分担者 (平成 25 年度のみ)  
 茂手木 公彦 (MOTEGI Kimihiko)  
 日本大学・文理学部・教授  
 研究者番号：4 0 2 1 9 9 7 8

(4) 研究分担者 (平成 26 年度のみ)  
 大山 淑之 (OHYAMA, Yoshiyuki)  
 東京女子大学・現代教養学部・教授  
 研究者番号：8 0 2 2 3 9 8 1

### (5) 連携研究者

鎌田 聖一 (KAMADA, Seiichi)  
 大阪市立大学・理学研究科・教授  
 研究者番号：6 0 2 5 4 3 8 0

### (6) 連携研究者

葉廣 和夫 (HABIRO, Kazuo)  
 京都大学・数理解析研究所・准教授  
 研究者番号：8 0 3 4 6 0 6 4