

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 19 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24340024

研究課題名(和文)漸近的に平坦な計量をもつ空間における非線型波動の大域挙動の解明

研究課題名(英文)Global behavior for nonlinear wave

研究代表者

久保 英夫(Kubo, Hideo)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：50283346

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では波の伝播を表す方程式について解析を行った。より詳しくは、複数の波が相互作用することで生じる非線形な効果と波が存在する時空間の構造の効果について調べた。例えば、空間内に障害物がある場合の波の伝播の様子が障害物がない場合のそれと同様であることを様々な不等式を導出することにより明らかにした。特に、空間2次元の場合を解決したことは大きな進展である。

また、膨張する宇宙を記述する計量のもとでの波の伝播の様子についても調べた。波を表す関数の性質を詳しく解析することで、膨張する宇宙モデルでは波の波長が長くなり、結果として安定化されるという直観的イメージと合致する描象を数学的に証明することに成功した。

研究成果の概要(英文)：Our research is concerned with equations which describe the way of propagation of waves. More precisely, we study the nonlinear effect produced by the interaction among waves, as well as the effect coming from the structure of the space-time in which the wave exists. For instance, when there exists an obstacle in the space, we are able to show that the way of propagation of waves are similar to that for the case where there exists no obstacle. In particular, it is a big progress to solve this kind of problem in two space dimensional case.

Moreover, we also study the way of propagation of waves in the space-time equipped with the metric which describes the expanding universe. By considering the property of function which represents the wave in detail, we rigorously proved the following intuitive image: the wavelength of the waves become long, so that the waves are stabilized in such an expanding universe model.

研究分野：Partial Differential Equations

キーワード：非線型波動方程式 漸近的に平坦な計量 時間大域解 解の爆発

1. 研究開始当初の背景

計量が平坦なミンコフスキー時空における非線型波動方程式に対する初期値問題の研究は1970代に発表されたF. John氏による先駆的な研究を受けて精力的に進められてきた。一般に、どんなに初期値が小さくとも非線型効果により解の有限時間爆発が起こり得るため、大域可解となるような非線型項の増大条件について注目が集まり、空間次元との兼ね合いにおいて臨界指数が決定され、臨界および劣臨界における最大存在時刻の詳細な評価およびそれらによって示唆される非線型項の特別な構造を仮定した場合の大域可解性についての解析等が発展した。更に、大域解の漸近挙動についても詳しく調べられている。

しかしながら、計量が平坦でない場合やそれと類似の性質を有する外部問題では、前述の初期値問題の場合と比べ、十分な解析がなされていないという状況にあった。これらの問題に共通にみられる本質的な困難は、斉次波動方程式の対称性に付随するベクトル場に依存するベクトル場法が上手く働かないという点である。そのため、ベクトル場法を上手く修正して、初期値問題以外の関連する問題について統一的な理解を提供するような枠組みが求められていた。

2. 研究の目的

前項で述べた当初の背景を踏まえ、まず、空間遠方では計量が平坦である場合の解析を行う。同時に、この場合には、計量の摂動の効果を調べることは原点付近に障害物がある外部問題の解析と強い関連があるので、これについても研究を行う。また、解の爆発の証明では、テスト関数法と呼ばれる手法の汎用性が知られており、解の最大存在時刻の上からの評価を導くのに適した形への改良を目指す。更に、ド・ジッター時空において、計量が波動の伝播の様子に及ぼす影響を調べ、その漸近挙動を調べる。この様に、空間遠方において計量が平坦であるような時空間における非線型波動方程式の解析から派生する様々な問題について考察することが我々の研究目的である。

3. 研究の方法

原点付近に障害物のある外部問題の研究では、前向き光円錐の近傍以外では解が強い減衰を示すための手法を確立する必要がある。初期値問題の場合のように、ベクトル場法とエネルギー法とを組み合わせるだけでは所望の評価を得ることができないので、解表示に依存した詳細な解析が必要となる。

テスト関数法の改良については、二階常微分不等式に関する加藤の不等式と呼ばれる命題をより洗練する方向で考察を進める。

ド・ジッター時空における波動伝播の解析は適当な変数変換を施したのち、関数解析的手法を駆使して行う。

4. 研究成果

外部問題に関しては、これまで解析が進んでいなかった空間二次元の場合に新たな解析手法を開発した。空間二次元の場合、解の減衰オーダーが遅いため、外部問題の解を全空間の解からの摂動と見做す、所謂、カットオフ法の適用が難しくなる。また、エネルギー法を用いる際に現れる境界積分の処理も空間三次元の場合と比べて、格段に難かしくなる。前者に関しては、全空間の解の表現公式から得られる減衰評価を精密化することにより、後者に関しては、時間微分が空間微分より速く減衰するという事実を明らかにすることにより、困難を克服した。具体的には、発表論文において、空間二次元において臨界となる三次の増大度を持つ非線型項に対して、最大存在時刻の下からの評価および非線型項が特別な代数構造を持つ場合の大域可解性について、全空間と同様の結果を導くことに成功した。但し、ノイマン境界条件を課す場合には、最大存在時刻の下からの評価が全空間の場合やディリクレ境界条件を課す場合と比べ、若干、悪くなっており、それが本質的なのか否かについては未解決である。また、解自身の減衰評価に関して、ほぼ最適と思われる評価を導出し、劣臨界の増大度しか持たない非線型項に対して、全空間の場合と同様の結果を導くことが可能となったのは予想以上の成果である。更に、空間三次元の場合に、線型化方程式の解の漸近挙動を障害物の影響を反映するような特徴付けを与え、初期値の振幅を零に近づける極限において解の最大存在時刻の下からの評価に現れる定数を決定した。

解の爆発に関しては、計量の摂動がない場合に、非線型項が臨界の増大度を持つ時に解の最大存在時刻の上からの評価を導く論法を精査し、既存の結果を連立系の場合に拡張し、高次元空間の場合に最適な評価を導いた。

ド・ジッター計量を持つ時空間の解析に関しては、質量項を持つ波動方程式の初期値問題について考察し、質量が大きく計量の影響を吸収できるような場合には、既存の結果において限定的だった初期値のクラスをより自然なエネルギー空間に拡張できることを明らかにした。更に、エネルギー空間における散乱理論を構築するとともに、非相対論極限についても考察し、対応するシュレディンガー方程式に関する解析を進めた。逆に、質量項が小さい場合には計量が平坦で質量項を持たない波動方程式の解と同様の振舞いを示す事ができた。

一方で、計量がミンコフスキー計量から離れている場合の典型例として、ポテンシャル摂動について考察し、光円錐の近傍以外では解が速く減衰するか否かについて詳しく調べた。そのポイントは解のレゾルベント表現を用いることであり、肯定的な結論が得られるような枠組みを構築することができた。

また、最終年度に大規模な国際研究集会を

札幌において開催し、一線級の研究者を国内外から招聘し、意見交換を行い、本研究課題の成果を発信した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 25 件)

1. M. Nakamura, Global solutions for nonlinear Schrödinger equations in de Sitter spacetime, *Advanced Studies of Pure Mathematics*, “Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations”, in press
2. M.A. Rammaha, H. Takamura, H. Uesaka, K. Wakasa, Blow-up of positive solutions to wave equations in high dimensions, *Differential and Integral equations*, 29(1-2), pp.1-18, 2016, 査読有
3. H. Kubo, On the pointwise estimate for the wave equation with compactly supported forcing term, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 14(4), pp.1469-1480, 2015, 査読有, doi:10.3934/cpaa.2015.14.1469
4. S. Katayama, A. Matsumura, H. Sunagawa, Energy decay for semilinear wave equations with dissipative structure in two space dimensions, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 22(4), pp.601-628, 2015, 査読有, doi:10.1007/s00030-014-0297-7
5. H. Takamura, Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations, *Nonlinear Analysis TMA*, 125, pp.227-240, 2015, 査読有, doi:10.1016/j.na.2015.05.024
6. 高村博之, 単独非線形波動方程式の初期値問題に対する一般論の終結に関する話題, 京都大学数理解析研究所講究録, 1969, pp.40-63, 2015, 査読無
7. 高村博之, 常微分不等式に対する加藤の補題の改良と半線形波動方程式への応用, 京都大学数理解析研究所講究録, 1959, pp.153-163, 2015, 査読無
8. M. Nakamura, On nonlinear Schrödinger equations derived from the nonrelativistic limit of nonlinear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, *Journal of Differential Equations*, 259(7), pp.3366-3388, 2015, 査読有, doi:10.1016/j.jde.2015.04.024
9. H. Kubo, On the exterior problem for nonlinear wave equations with small initial data, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 64, pp.281-288, 2015, 査読有
10. S. Katayama, T. Matoba, H. Sunagawa, Semilinear hyperbolic systems violating the null condition, *Mathematische Annalen*, 361(1-2), pp.275-3112, 2015, 査読有, doi: 10.1007/s00208-014-1071-1
11. M. Nakamura, Remarks on a dispersive equation in de Sitter space-time, *Dynamical Systems, Differential Equations and Applications AIMS Proceedings*, pp.901-905, 2015, 査読有, doi: 10.3934/proc.2015.0901
12. H. Kubo, Almost global existence for nonlinear wave equations in an exterior domain in two space dimensions, *J. Differential Equations*, 257, pp.2765-2800, 2014, 査読有, doi:10.1016/j.jde.2014.05.048
13. H. Takaoka, K. Wakasa, Almost global solution of semilinear wave equations with the critical exponent in high dimensions, *Nonlinear Analysis*, 109, pp.187-229, 2014, 査読有, doi:10.1016/j.na.2014.06.007
14. M. Nakamura, Remarks on a weighted energy estimate and its application to nonlinear wave equations in one space dimension, *Journal of Differential Equations*, 256(2), pp.389-406, 2014, 査読有, doi:10.1016/j.jde.2013.09.005
15. N. Nakamura, The Cauchy problem for semi-linear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 410 (1), pp.445-454, 2014, 査読有, doi:10.1016/j.jmaa.2013.08.059
16. S. Katayama, H. Kubo, Lower bound of the lifespan of solutions to semilinear wave equations in an exterior domain, *J. Hyper. Differential Equations*, 10(2), pp.1-36, 2013, 査読有, doi:10.1142/S0219891613500094
17. S. Katayama, H. Kubo, S. Lucente, Almost global existence for exterior Neumann problems of semilinear wave equations in 2D, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 12(6), pp.2331-2360, 2013, 査読有, doi:10.3934/cpaa.2013.12.2331
18. H. Kubo, Global existence for exterior problems of semilinear wave equations with the null condition in 2D, *Evolution Equations and Control Theory*, 2(2), pp.319-335, 2013, 査読有, doi:10.3934/eect.2013.2.319
19. H. Kubo, A. Osaka, M. Yazici, Global existence and blow-up for wave

- equations with weighted nonlinear terms in one space dimension, *Interdisciplinary Information Sciences*, 19(2), pp.143-148, 2013, 査読有, doi: 10.4036/iis.2013.143
20. S. Katayama, Asymptotic behavior for systems of nonlinear wave equations with multiple propagation speeds in three space dimensions, *Journal of Differential Equations*, 255(1), pp.120-150, 2013, 査読有, doi: 10.1016/j.jde.2013.04.003
 21. T. Iwabuchi, M. Nakamura, Global and almost global solutions for some nonlinear parabolic equations in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces, *Adv. Differential Equations*, 18(7-8), pp.687-736, 2013, 査読有
 22. H. Kubo, K. Kubota, Generalized wave operators for a system of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Hokkaido Mathematical Journal*, 42(1), pp.81-111, 2013, 査読有, doi:10.14492/hokmj/1362406640
 23. Y. Kurokawa, H. Takamura, K. Wakasa, The blow-up and lifespan of solutions to systems of semilinear wave equation with critical exponent in high dimensions, *Differential Integral Equations*, 25(3-4), pp.363-382, 2012, 査読有
 24. M. Nakamura, K. Tsutaya, Scattering theory for the Dirac Equation of Hartree type and the semirelativistic Hartree equation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 75(8), pp.3531-3542, 2012, 査読有, doi:10.1016/j.na.2012.01.012
 25. S. Katayama, Asymptotic pointwise behavior for systems of semilinear wave equations in three space dimensions, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 9(2), pp.263-323, 2012, 査読有, doi:10.1142/S0219891612500099
- [学会発表](計 30 件)
1. H. Kubo, On the large time behavior for a quasi-linear system of the wave equation, Truth Forum of Science, PDE Seminar, 2016年3月23日, 杭州市(中国)
 2. H. Kubo, On the large time behavior for a quasi-linear system of the wave equation, 九州函数方程式セミナー, 2015年11月27日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市)
 3. H. Kubo, Large time behavior of the wave equation with characteristic perturbation, The 13th Linear and Nonlinear Waves, 2015年11月4日, ピアザ淡海滋賀県立県民交流センター(滋賀県・大津市)
 4. N. Nakamura, The Cauchy problem for nonlinear complex Ginzburg-Landau equations, 10th International ISAAC Congress, 2015年8月5日, マカオ(中国)
 5. H. Takamura, Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations, 10th International ISAAC Congress, 2015年8月4日, マカオ(中国)
 6. H. Kubo, On the local smoothing for the Dirac equation, 10th International ISAAC Congress, 2015年8月3日, マカオ(中国)
 7. S. Katayama, Asymptotic behavior for systems of semilinear wave equations violating the null condition, Workshop on Partial Differential Equations and Numerical Analysis, 2015年7月7日, 延吉市(中国)
 8. H. Kubo, On the local smoothing for the Klein-Gordon equation, International Conference on Recent Advances in Hyperbolic Partial Differential Equations, 2014年12月4日, 広島国際会議場(広島県・広島市)
 9. H. Kubo, On the exterior problem for nonlinear wave equations, The 10th HU and SNU Symposium on Mathematics; Recent progress on theory of probability and partial differential equations - as a part of The 17th HU-SNU Joint Symposium, 2014年11月28日, 北海道大学(北海道・札幌市)
 10. 久保英夫, On the local smoothing for the Klein-Gordon equation, 「応用解析」研究会, 2014年11月22日, 早稲田大学(東京都・新宿区)
 11. 久保英夫, 非線形波動方程式に対する外部問題の解の時間大域挙動, 熊本大学数学談話会, 2014年10月29日, 熊本大学(熊本県・熊本市)
 12. 久保英夫, On the exterior problem for wave equations with critical and subcritical nonlinearity, 札幌数理物理研究集会, 2014年9月1日, 北海道大学(北海道・札幌市)
 13. H. Takamura, Global existence for semilinear wave equations including the blow-up term in four space dimensions, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 60, 2014年7月11日, マドリッド(スペイン)
 14. M. Nakamura, Remarks on a dispersive

- equation in de Sitter space-time, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Special Session 60, 2014年7月9日, マドリード(スペイン)
15. H. Kubo, On the exterior problem for the wave equation with critical nonlinearity in 2D, Analysis of Relativistic and Non-Relativistic models in Quantum Mechanics, 2014年4月17日, ローマ(イタリア)
 16. 久保英夫, On the exterior problem for the wave equation with critical nonlinearity in 2D, 第31回九州における偏微分方程式研究集会, 2014年1月29日, 福岡大学(福岡県・福岡市)
 17. 久保英夫, On the pointwise decay estimate for the wave equation with compactly supported forcing term, 偏微分方程式セミナー, 2013年10月19日, 大阪市立大学(大阪府・大阪市)
 18. 久保英夫, Lower bounds for the lifespan of solutions to nonlinear wave equations in two-dimensional exterior domain, 第9回非線形の諸問題, 2013年9月5日, 高知大学(高知県・高知市)
 19. 片山聡一郎, Semilinear hyperbolic systems violating the null condition, Mexico-Japan Joint Meeting on PDE at Morelia, 2013年9月5日, モレリア(メキシコ)
 20. 久保英夫, Asymptotic behavior for the exterior problem to semilinear wave equation in 2D, Nonlinear Wave Equations and Fluid Mechanics, 2013年8月24日, 室蘭工業大学(北海道・室蘭市)
 21. 高村博之, Global existence for semilinear wave equations with the blow-up term in high dimension, The 9th ISAAC Congress, 2013年8月7日, クラクフ(ポーランド)
 22. 土井一幸, 波動方程式の解の微分に対する重み付き各点評価について, 三大学偏微分方程式セミナー, 2013年5月29日, 中央大学(東京都・文京区)
 23. 高村博之, 単独非線形波動方程式の初期値問題に対する一般論とその最適性最終問題, 日本数学会 2013年度年会函数方程式論分科会特別講演, 2013年3月23日, 京都大学(京都府・京都市)
 24. H. Kubo, On the exterior problem for the wave equation in 2D, Seminari di Analisi, 2013年3月14日, ピサ(イタリア)
 25. S. Katayama, A semilinear hyperbolic system violating the null condition, 第30回九州における偏微分方程式研究会, 2013年1月31日, 福岡大学(福岡県・福岡市)
 26. 久保英夫, On the null condition for nonlinear massless Dirac equations, 弘前非線形方程式研究会, 2012年11月3日, 弘前大学(青森県・弘前市)
 27. 土井一幸, 波動方程式の解の微分に対する重み付き各点評価の考察, 函館偏微分方程式研究集会, 2012年10月7日, 公立ほこだて未来大学(北海道・函館市)
 28. H. Kubo, On the exterior problem for nonlinear wave equations in 2D, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012年7月5日, オーランド(アメリカ)
 29. H. Kubo, Global existence for critical nonlinear massless Dirac equations with null structure in 3D, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012年7月3日, オーランド(アメリカ)
 30. H. Kubo, On the null condition for nonlinear massless Dirac Equations in 3D, Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators, 2012年6月27日, エスポー(フィンランド)
6. 研究組織
- (1) 研究代表者
 - 久保 英夫 (KUBO, Hideo)
 - 北海道大学・大学院理学研究院・教授
 - 研究者番号: 50283346
 - (2) 研究分担者
 - 片山 聡一郎 (KATAYAMA, Soichiro)
 - 和歌山大学・教育学部・教授
 - 研究者番号: 70283942
 - 高村 博之 (TAKAMURA, Hiroyuki)
 - 公立ほこだて未来大学・システム情報科学部・教授
 - 研究者番号: 40241781
 - 星賀 彰 (HOSHIGA, Akira)
 - 静岡大学・工学部・准教授
 - 研究者番号: 60261400
 - 中村 誠 (NAKAMURA, Makoto)
 - 山形大学・理学部・教授
 - 研究者番号: 70312634
 - 土井 一幸 (DOI, Kazuyuki)
 - 富山県立大学・工学部・講師
 - 研究者番号: 70283942