

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24530226

研究課題名(和文) 非定常性に関する統計的逐次検定と変化点探索について

研究課題名(英文) Statistical Sequential Testing and Change-point Detection on Nonstationarity

研究代表者

永井 圭二 (NAGAI, KEIJI)

横浜国立大学・国際社会科学研究院・教授

研究者番号：50311866

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：この研究においては、オンラインで観測される確率系列を想定し、金融時系列のバブルなどの非定常性の存在を探索する逐次検定の方法と、金融時系列におけるパラメータの変化を探索する逐次変化点問題の方法を確立した。また、疫学や人口統計で重要な分枝過程に関して、ウイルスや人口の爆発的な増加が起きるのか、それとも根絶や人口減少が起きるのかの逐次的に探索する手法を考案した。それぞれに対して、数学的な最適性の性質と数値計算の方法を見出した。

研究成果の概要(英文)：In this research, assuming online observations of stochastic sequence, I established a sequential testing procedure for the detection of the existence of non-stationary state such as bubble in financial time series and a sequential change-point detection procedure for the detection of the change in a parameter in financial time series. I also developed a sequential testing procedure and a sequential change-point detection for the criticality of branching process, which is important in epidemiology and population statistics. In each case, some mathematical optimality and a method for numerical computation are developed.

研究分野：経済統計

キーワード：自己回帰過程 分枝過程 統計的逐次探索 変化点問題 停止時刻 統計的意思決定論 局所漸近正規
局所漸近最適性

1. 研究開始当初の背景

統計的逐次解析の理論において、70年代後半、Woodroffe および Lai and Siegmund は非線形更新理論を用いて動作特性の高次漸近理論を確立し、Wald 以来懸案であった過誤確率や期待停止時刻の精密な近似を得ることに成功した。しかしながら、独立同一分布に従う系列の和に関する Wald の恒等式で近似を行う非線形更新定理は、非独立な系のモデリングが中心となる現代統計学の広大な分野で応用されることはなかった。本研究は離散時間で観測される確率過程が連続時間の拡散過程で近似できる場合に、時間変更などの確率解析の技法が、逐次検定と変化点の逐次探索の動作特性の解明にいかにも有効に働くかを系統的に示した初めての研究である。

2. 研究の目的

本研究では、観測される確率過程が伊藤過程で近似できる場合に、確率解析の手法を用いて統計的逐次解析の理論を構築する。その際、時間変更(Time Change)などの確率解析の技法が、逐次検定と変化点の逐次探索の最適性と動作特性の解明にいかにも有効に働くかを系統的に示すことを目的とする。このテーマが応用上重要なのは、できる限り早急に危機的事象が起きていることを知らせる手法と、判断に誤りが少ない(オオカミ少年でない)手法を、両立させることを目指している点にある。また、帰無仮説に対して判別が難しい局所対立仮説を想定している点で、経済現象や自然現象の非定常な状態にたいする精緻な早期警戒警報の手法を確立するのに役立つと考える。

3. 研究の方法

統計的逐次解析の理論において、70年代後半 Woodroffe や Lai and Siegmund 等はランダムウォークの非線形更新定理 (Nonlinear Renewal Theorem) を用いて動作特性の高次漸近理論を確立し、Wald 以来懸案であった過誤確率や期待停止時刻の精密な近似を得ることに成功した。しかしながら、独立で同一分布にしたがう確率変数列の和に関する Wald の恒等式に基礎を置く非線形更新定理は従属的な確率過程にはその理論は適用不能であった。本研究では、離散時間で観測される従属的な確率過程が、連続時間の伊藤過程で近似できる場合の統計的逐次解析の理論を考察する。とくに統計的逐次検定と統計的变化点探索について考察を行う。

4. 研究成果

本研究の概要を知るには、本研究代表者が人見光太郎氏と西山慶彦氏の助力を得てその理論を創始した AR(1)の単位根の統計的逐次検定の理論を理解するのが良い。定数項の

無い AR(1)過程が独立で同一な分布に従う誤差項を持ち、強定常であると仮定したとき、エルゴード定理とマルチンゲール中心極限定理により、自己回帰係数に関する t 統計量は、標準正規分布を極限に持つ。誤差項が独立同一性を持たない場合でも、weakly dependent な仮定の下で同じ性質が成り立つ。単位根の場合、AR(1)はランダムウォークとなり、 $D[0,1]$ 上の Donsker の不変原理によりブラウン運動で近似される。その際 t 統計量は漸近正規性を持たない。その分布は Dickey=Fuller (1979), J. Amer. Statist. Assoc. によりモンテカルロ法を用いて計算され、一般に利用されるに至っている。Dickey=Fuller は、 t 統計量よりもすこし検出力があるとされる F 統計量も提案し、これについても分布をモンテカルロ法によって求めている。爆発的な AR(1)の場合、正規誤差の仮定の下、エルゴード定理を駆使して t 統計量の漸近正規性が証明される。 F 統計量については同じ仮定の下で Cauchy 分布で表現されることが知られている。局所的な場合、すなわち単位根の周りで局所パラメータ (いわゆる near-unit root) を持つ場合に、Donsker 不偏原理の成立する誤差項を仮定して、 t 統計量が $AR(1)$ が Ohnstein=Uhlenbeck (OU) 過程によって近似できることを示している。これは、Bobkoski の Ph.D 論文で示されたものである。局所的な場合で定常な (局所定常と呼ぶ) OU 過程の場合と非定常な (局所非定常と呼ぶ) OU 過程の場合があるが、局所定常な場合の t 統計量と F 統計量の分布は田中勝人によって調べられている。そのさい強調すべきは、実際の自己回帰係数が near-unit root の場合、たとえば 0.975 といった値の場合、サンプルサイズがあまり大きくない場合では、通常の場合の理論 (非局所定常パラメータの理論) はパワーの当てはまりが良くないという点である。これは非局所定常パラメータの場合の高次漸近理論を適用したとしても同じである。もちろん局所パラメータを想定している OU 過程の場合は、近似は極めて良く、理論的にも美しい。

研究代表者、人見氏、および西山氏が提案した AR(1)の逐次検定は、観測値が逐次的に与えられる状況を考え、Fisher 情報量がある閾値に達しときサンプリングを停止するという停止時刻を考え、その時刻で t 統計量を用いて検定を行うというものである。このとき、帰無仮説は単位根とする。対立仮説は、Fisher 情報量の水準を決める閾値を大きくしたとき、帰無仮説に近づく局所対立仮説を考える。ただし、対立仮説は、定常な状態から帰無に近づけてもよいし、爆発の状態から帰無に近づけてもよい。このとき、AR(1)の誤差項に i.i.d.などの仮定を置いて、 t 統計量は、閾値を大きくしたとき、帰無でも、局所定常でも、局所爆発でも漸近正規性を持つ。また、 F 統計量は t 統計量と漸近的には同じ

ものになる。このことは通常の漸近理論の Dickey-Fuller の t 統計量や F 統計量が帰無仮説で異なる非正規分布に収束する点と対蹠的である。また、検定のパワーも簡単に計算できる点で利便性が高い。加えて局所爆発な場合でも t 統計量や F 統計量の振る舞いが正規近似できる点は興味深い。その理論の特徴は、検定統計量の極限はマルチンゲールを含み、Fisher 情報量の極限はそのマルチンゲールの二次変分となるため、確率解析の時間変更の理論より、検定統計量は DDS (Dambis-Dubins&Shchwartz) ブラウン運動で近似できるという点にある。また、今述べた確率解析の手法を借りなくとも、局所漸近正規性 (Local Asymptotic Normality; LAN) が成立することより、局所対立仮説の下での漸近正規性が LeCam の第 3 補題から導かれる。LAN の性質によりこの検定方法が局所漸近的に最適な検定 (すなわちオオカミ少年でない) ことが分かる。また、確率解析の手法により、停止時刻の性質も同時に求められる。つまり停止時刻の極限は DDS ブラウン運動で定義された次元 $3/2$ の Bessel 過程で表現される。Bessel 過程の推移確率密度は特殊関数で表されるので、停止時刻の漸近的な期待値や分散は Mathematica などの数式処理ソフトで計算可能となるのである。数値計算の結果を見るとシミュレーションと対比して良好であることがわかる。

本研究では、連続時間での伊藤過程のパラメータに関して、停止時刻を用いた逐次検定と逐次変化点探索を考え、動作特性と最適性の一般理論を確率解析の手法を用いて確立する。そしてその応用として、以下の 3 つの離散時間モデルの逐次的問題を考える。

(i) 高階自己回帰モデルの単位根の統計的逐次検定

(ii) 定常から非定常へ変化する自己回帰モデルの統計的逐次探索

(iii) 多次元分枝過程の臨界性に関する統計的逐次検定

この 3 つの研究は、研究代表者が、2014 年 9 月に横浜国立大学国際社会科学研究所で博士号(経済学)を取得した許贊(キョイン)氏、万一青(マンイツセイ)氏、王歆(オウカン)氏と共同研究である。(i)の問題は、1 つだけ単位根が存在する場合と 2 つ以上単位根が存在する場合で、それぞれ逐次検定統計量の正規性は求められている。(ii)については OU 過程からブラウン運動に変化する確率過程の性質を調べている。(iii)については多次元化することで生じるさまざまな問題が解決されている。

本研究が応用上の重要視されるのは、できる限り早急に危機的事象が起きていることを知らせる手法(早期警戒警報システム)と、判断に誤りが少ない手法(オオカミ少年でない手法)を、両立する手法を目指している点にある。また、帰無仮説に対して、判別が難しい局所対立仮説を想定している点で、経済

現象や自然現象の非定常な状態にたいする、より精緻な早期警戒警報システムの手法を確立することを目指している点も評価されるものと考えられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

K.Nagai and Y. Xu, "Sequential unit root test for AR(p) process", (2014), 横浜国立大学国際社会科学研究所, 博士(経済学)学位論文, 国社博甲第 245 号, Xu Yun (許贊), "Sequential Unit Root Test of a pth-order Autoregressive Process", p36-50, 2014 年 9 月, (査読有).

Y. Xu and K.Nagai, "Sequential multiple unit root test for AR(p) process", (2014), 横浜国立大学国際社会科学研究所, 博士(経済学)学位論文, 国社博甲第 245 号, Xu Yun (許贊), "Sequential Unit Root Test of a pth-order Autoregressive Process", p51-61, 2014 年 9 月, (査読有).

K.Nagai and Y. Wan, "Sequential Probability Ratio of AR(1)", 横浜国立大学国際社会科学研究所, 博士(経済学)学位論文, 国社博甲第 242 号, Wan Yijing (万一青), "Sequential Change Detection", p61-70, 2014 年 9 月, (査読有).

K.Nagai and Y. Wan, "Cumulative Sum Test of AR(1)", 横浜国立大学国際社会科学研究所, 博士(経済学)学位論文, 国社博甲第 242 号, Wan Yijing (万一青), "Sequential Change Detection", p71-79, 2014 年 9 月, (査読有).

永井圭二, 王歆「臨界値に対する分枝過程の逐次検定」, (2014), 横浜国立大学国際社会科学研究所, 博士(経済学)学位論文, 国社博甲第 241 号, 王歆, 「移民項のある分枝過程の統計的逐次解析」, p43-65, 2014 年 9 月, (査読有).

[学会発表](計 1 件)

K.Nagai, "Nonparametric Estimation for Quadratic Covariation of Two-dimensional Diffusion under Nonsynchronous High Frequency Observations", Institute of Mathematical Statistics, Asia Pacific Rim Meeting, 2012 年 07 月 02 日 Tsukuba, Japan (招待講演)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

永井 圭二 (NAGAI KEIJI)
横浜国立大学・国際社会科学研究院・教授
研究者番号：50311866

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：