

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 24 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540010

研究課題名(和文) アフィン量子群の標準加群の結晶基底の幾何学的実現

研究課題名(英文) Geometric realization of the crystal bases of standard modules over quantum affine algebras

研究代表者

内藤 聡 (Naito, Satoshi)

東京工業大学・理工学研究科・教授

研究者番号：60252160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：アフィン量子群上のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の Demazure 部分加群の次数付き指標を、量子 Bruhat グラフの言葉で明示的に書き表した。また、非対称マクドナルド多項式の $t=0$ と $t=\infty$ での特殊化を、やはり量子 Bruhat グラフの言葉で明示的に書き表した。
そしてこれらの結果を用いて、有限ワイル群の単位元及び最長元に付随する Demazure 部分加群の次数付き指標が、対称マクドナルド多項式の $t=0$ での特殊化及び(最長元に付随する)非対称マクドナルド多項式の $t=\infty$ での特殊化のそれぞれと、本質的に同じものである事を証明した。

研究成果の概要(英文)：First, we got an explicit description, in terms of the quantum Bruhat graph, of the graded character of an arbitrary Demazure submodule of a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra. Also, we got an explicit description, in terms of the quantum Bruhat graph, of the specializations at $t=0$ and $t=\infty$ of an arbitrary nonsymmetric Macdonald polynomial. By combining these results, we proved that the graded character of the Demazure submodule corresponding to the identity element (resp., the longest element) of a finite Weyl group is identical to the product of a certain factor (which is an explicit rational function in q) and the specialization at $t=0$ (resp., at $t=\infty$) of the symmetric (resp., nonsymmetric) Macdonald polynomial associated to a dominant integral weight (resp., anti-dominant integral weight).

Moreover, we studied the connection of level-zero Demazure submodules above with Schubert subvarieties of a semi-infinite flag manifold.

研究分野：アフィン量子群の表現論で、特に可積分表現を持つ結晶基底を研究している。

キーワード：表現論 アフィン量子群の表現論 レベル・ゼロ表現 extremal ウェイト加群 Demazure 部分加群
マクドナルド多項式 Lakshmibai-Seshadri パス 半無限旗多様体

1. 研究開始当初の背景

有限次元半単純リー環に付随する量子群 (量子展開環) の有限次元既約最高ウェイト表現の結晶基底の幾何学的実現としては、中島啓による quiver variety を用いたものの他に、アフィン・グラスマン多様体を用いるものが知られている。これは、アフィン・グラスマン多様体という無限次元多様体 (正確には、有限次元射影多様体の帰納的極限) 中のシューベルト多様体の横断的スライスの (有限次元) 既約成分である Mirkovic-Vilonen (MV) サイクルを用いるものである。そして、この MV サイクルのモーメント写像による像は MV 多面体と呼ばれ、有限次元既約最高ウェイト表現の結晶基底の組合せ論的な実現を与えている事が分かっている。

一方、(アフィン・リー環に付随する量子群である) アフィン量子群のレベル・ゼロ有限次元表現のうちでも、特にレベル・ゼロ基本表現と呼ばれるものとそれらのテンソル積となっている (ある種のスペクトル・パラメーターに対応する) 標準加群は、やはり結晶基底を持つ事が知られていた。このような標準加群は、中島啓により、quiver variety の (極大トーラスに関する) 同変 K -群として幾何学的に実現されていたが、その結晶基底の幾何学的な実現は得られていなかった。

但し、上記のレベル・ゼロ基本表現やそれらのテンソル積となっているような標準加群の結晶基底については、研究代表者の内藤聡と連携研究者の佐垣大輔准教授 (筑波大学) によって、レベル・ゼロ Lakshmibai-Seshadri (LS) パスを用いた組合せ論的な実現が既に得られていた; これは、レベル・ゼロ (つまり、アフィン・リー環のセンターでの値がゼロであるような) 整ウェイトを型とする LS パスを、null ルートを modulo して見たものである。

2. 研究の目的

上述のような背景に基づいて、この研究の目的は、アフィン量子群のレベル・ゼロ基本表現やそれらのテンソル積となるような標準加群の結晶基底を、幾何学的に実現する事であった。より詳しくは、(ダブル) アフィン・グラスマン多様体、あるいは、射影直線から (有限次元または無限次元) 旗多様体へのある種の代数的写像の成す無限次元多様体である半無限旗多様体を用いて、これらの標準加群の結晶基底を実現する事であった。

また、それらの幾何学的実現と、我々が既に得ている組合せ論的な実現であるレベル・ゼロ LS パスとの間の明示的な関係を見出すことも研究の目的であった。

3. 研究の方法

当初の研究計画は、以下のようなものであった。

(1) 先ず、研究代表者の内藤聡とその連携研究者である佐垣大輔准教授 (筑波大学) が協力して、レベルゼロ基本表現やそれらのテンソル積となっている標準加群の結晶基底の組合せ論的な実現で、幾何学的な意味がより明確なものを見出す。

(2) そして、研究代表者の内藤聡が連携研究者の加藤周准教授 (京都大学)、斉藤義久准教授 (東京大学) と協力して、これらの組合せ論的な実現と対応する幾何学的対象を、(ダブル) アフィン・グラスマン多様体、あるいは半無限旗多様体を用いて構成する。

4. 研究成果

(1) ところで、レベルゼロ基本表現やそれらのテンソル積は、柏原により導入された (レベル・ゼロ) extremal ウェイト加群と呼ばれるある種の普遍性を持った無限次元表現から、適当な商加群を取る事で得られる事が分かっている。

上述の研究計画の (1) に関して、我々は以下の研究成果を得た。

先ず、我々は、このレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底が、半無限 Lakshmibai-Seshadri (LS) パスとして実現できる事を証明した。この半無限 LS パスは、アフィン・ワイル群上の半順序として通常の Bruhat 順序の代わりに半無限 Bruhat 順序 (これは、半無限旗多様体のシューベルト部分多様体の間での閉包関係に他ならない) を採用する事で定義される LS パスである。これらのパスは、アフィン・リー環のカルタン部分環の双対空間に値を取る折れ線写像 (実数の閉区間 $[0, 1]$ からの連続で区分的に線形な写像) として実現されるが、それを null ルートを modulo する事で、有限次元半単純リー環のカルタン部分環の双対空間に値を取る折れ線写像 (パス) が自然に定義される。我々は、半無限 LS パスからこの様にして得られるパスが、有限ワイル群に付随する量子 Bruhat グラフの言葉で明示的に記述されるパス (量子 LS パス) である事、そしてそれが先に述べたレベル・ゼロ LS パスに他ならない事を証明した。

この様にして、より幾何学的な意味がはっきりした組合せ論的对象を導入し、それとレベル・ゼロ LS パスの関係を明らかにする事ができた。

次に、我々は、対称マクドナルド多項式の $t=0$ での特殊化を、量子 LS パス (= レベル・ゼロ LS パス) によって明示的に書き表す公式を得た; これは、実は、有限ワイル群の最長元に付随する非対称マクドナルド多項式の $t=0$ での特殊化に他ならない。また、有限ワイル群の一般の元に付随する非対称マクドナルド多項式の $t=0$ での特殊化を量子 LS パスにより明示的に書き表す公式も得た。

我々は、さらに、extremal ウェイト加群の (有限ワイル群の一般の元に付随する)

Demazure 部分加群の結晶基底を、半無限 LS パスによって具体的に実現し、その次数付き指標を量子 LS パスによって明示的に書き表す事が出来た。

そして、これらの結果を用いて、有限ワイル群の単位元に付随する Demazure 部分加群の次数付き指標が、対称マクドナルド多項式の $t = 0$ での特殊化にある具体的な (q) 有理関数を掛けたものである事を証明した。また、有限ワイル群の最長元に付随する Demazure 部分加群の次数付き指標が、同じ最長元に付随する非対称マクドナルド多項式の $t =$ での特殊化に、 $t = 0$ の時と同じ有理関数を掛けたものである事を証明した。

(2) ところで、アフィン・ワイル群上の自然な半順序としては、通常の Bruhat 順序と半無限 Bruhat 順序があり、有限ワイル群上に制限すればどちらも同じものとなる。そして、アフィン・ワイル群の勝手な 2 元に対して、それらを十分大きな優正ウエイト (による平行移動に対応する元) でシフトする事によって、半無限 Bruhat 順序は通常の Bruhat 順序と対応する。この事から、半無限 Bruhat 順序の一種の極限が通常の Bruhat 順序となっているとみなせる。このような考察から、我々は、アフィン量子群のレベル・ゼロ表現と最も自然に関係している幾何学的対象は、(ダブル) アフィン・グラスマン多様体というよりは、実は半無限旗多様体ではないかと考えた。

上述の研究計画の (2) に関して、我々は以下の研究成果を得た。

先ず、我々は、半無限旗多様体 (の形式的べき級数版) をその研究対象とした; 一方、射影直線から有限次元旗多様体への代数的写像の成す多様体は、quasi- i -maps space と呼ばれ、こちらは多項式版の半無限旗多様体である。そして、この半無限旗多様体とそのシューベルト部分多様体 (さらに、その Bott-Samelson-Demazure-Hansen 型の特異点解消) が正規代数多様体である事を証明し、これらの上の直線束の大域切断の空間についての Borel-Weil 型の定理や、高次コホモロジーの消滅等の結果を得た。

さらに、この半無限旗多様体の上の (岩堀部分群に関する) 同変準連接層の成す K -群の構造を調べた。そして、優整形式に付随する直線束と勝手な半無限シューベルト多様体の構造層のこの K -群における積を、幾つかの半無限シューベルト多様体の構造層の 1 次結合として表した時の各係数を半無限 LS パスの言葉で記述する公式を得た。これは、通常の有限次元旗多様体に関する Schubert calculus における Pieri-Chevalley 公式の、半無限旗多様体への拡張とみなせるものである。また、我々の K -群には、Nil-DAHA (ダブルアフィン・ヘッケ環の $t = 0$ での特殊化) の忠実な作用がある事も分かった。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki, Representation-theoretic interpretation of Cherednik-Orr's recursion formula for the specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t =$, Transform. Groups, 査読有, 掲載決定済み.

S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki, Specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t =$ and Demazure submodules of level-zero extremal weight modules, Trans. Amer. Math. Soc., 査読有, 掲載決定済み,

<https://doi.org/10.1090/tran/7114>

C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals III: nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = 0$ and Demazure characters, Transform. Groups, 査読有, 掲載決定済み, Doi: 10.1007/s0031-017-9241-1

C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and $P = X$, Int. Math. Res. Not., 査読有, 掲載決定済み, Doi: 10.1093/imrn/rnw129

S. Naito and H. Watanabe, A combinatorial formula expressing periodic R -polynomials, J. Combin. Theory Ser. A, 査読有, Vol. 148, 2017, pp. 197—243, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcta.2016.12.008>

N. Fujita and S. Naito, Newton-Okounkov convex bodies of Schubert varieties and polyhedral realizations of crystal bases, Math. Z., 査読有, Vol. 285, 2017, pp. 325—352, Doi 10.1007/s00209-016-1709-7

C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai-Seshadri paths and root operators, Adv. Stud. Pure Math., 査読有, Vol. 71, 2016, pp. 267—294.

S. Naito and D. Sagaki, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials, Math. Z., 査読有, Vol. 283, 2016, pp. 967—1009,

Doi 10.1007/s00209-016-1628-7

M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, *Adv. Math.*, 査読有, Vol. 290, 2016, pp. 967–1009, <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2015.11.037>

C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Explicit description of the degree function in terms of quantum Lakshmibai-Seshadri paths, *Toyama Math. J.*, 査読有, Vol. 37, 2015, pp. 107–130.

C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, *Int. Math. Res. Not.*, 査読有, Vol. 2015, 2015, pp. 1848–1901, Doi: 10.1093/imrn/rnt263

S. Naito, D. Sagaki, and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, Part III: Proof of the connectedness, *Springer Proc. Math. Stat.*, 査読有, Vol. 40, 2013, pp. 361–402, DOI 10.1007/978-1-4471-4863-0_15

S. Naito and D. Sagaki, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of types B_{∞} , C_{∞} , and D_{∞} , *Trans. Amer. Math. Soc.*, 査読有, Vol. 364, 2012, pp. 6531–6564, DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2012-05597-8>

S. Naito, D. Sagaki, and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, Part II: Explicit description, *Contemp. Math.*, 査読有, Vol. 565, 2012, pp. 185–216, <http://dx.doi.org/10.1090/conm/565/11179>

S. Naito, D. Sagaki, and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, Part I: Construction of the affine analogs, *Contemp. Math.*, 査読有, Vol. 565, 2012, pp. 143–184, <http://dx.doi.org/10.1090/conm/565/11180>

S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Tensor products and Minkowski sums of Mirkovic-Vilonen polytopes, *Transform.*

Groups, 査読有, Vol. 17, 2012, pp. 195–207, DOI: 10.1007/s00031-011-9159-0

〔学会発表〕(計 14 件)

Satoshi Naito, Pieri-Chevalley type formula for equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds, Conference on Algebraic Representation Theory, 2016 年 12 月 2 日, Harbin Institute of Technology, Shenzhen (People's Republic of China).

Satoshi Naito, Standard monomial theory for semi-infinite LS paths with geometric application, Geometric Representation Theory 2016, 2016 年 10 月 11 日, 京都大学 (京都府・京都市).

Satoshi Naito, アフィン量子群上の extremal ウェイト加群の Demazure 部分加群の指標公式と、非対称 Macdonald 多項式の特異化, 2016 年度日本数学会秋季総合分科会代数学分科会特別講演, 2016 年 9 月 15 日, 関西大学 (大阪府・吹田市).

Satoshi Naito, Symmetric Macdonald polynomials and pseudo-quantum Lakshmibai-Seshadri paths, Infinite Analysis 16, 2016 年 3 月 26 日, 大阪市立大学 (大阪府・大阪市).

Satoshi Naito, 対称 Macdonald 多項式の $t=0$ における特異化と、アフィン量子群の有限次元表現, 第 60 回代数学シンポジウム, 2015 年 9 月 3 日, 静岡大学 (静岡県・静岡市).

Satoshi Naito, Specializations of symmetric Macdonald polynomials and pseudoQLS paths, Summer School and Workshop on “Lie Theory and Representation Theory” IV, 2015 年 7 月 4 日, East China Normal University, Shanghai (People's Republic of China).

Satoshi Naito, Comparison of the two specializations of nonsymmetric Macdonald polynomials: at zero and at infinity, Winter School on “Representation Theory”, 2015 年 1 月 22 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市).

Satoshi Naito, On two specializations of nonsymmetric Macdonald polynomials: at zero and at infinity, Shanghai Workshop on Representation Theory, 2014 年 12 月 7 日, Tongji University, Shanghai (People's Republic of China).

Satoshi Naito, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and

Macdonald polynomials, ICM Satellite Conference on "Representation Theory and Related Topics", 2014 年 8 月 8 日, Exco, Daegu (South Korea).

Satoshi Naito, Semi-infinite LS path realization of Demazure subcrystals for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, Shanghai Workshop on Representation Theory, 2013 年 12 月 7 日, East China Normal University and Tongji University, Shanghai (People's Republic of China).

Satoshi Naito, A new path model for extremal weight modules over quantum affine algebras, RIMS symposium "String Theory, Integrable Systems and Representation Theory", 2013 年 7 月 30 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市).

Satoshi Naito, Level-zero Littelmann paths, Kirillov-Reshetikhin crystals, parabolic quantum Bruhat graph, and Macdonald polynomials, Workshop on "Whittaker Functions, Schubert Calculus and Crystals", 2013 年 3 月 7 日, Brown University, Providence (USA).

Satoshi Naito, On the description of level-zero Lakshmibai-Seshadri paths in terms of the quantum Bruhat graph, Conference on "VOAs and Related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto", 2012 年 9 月 13 日, 筑波大学 (茨城県つくば市).

Satoshi Naito, On an intrinsic description of level-zero Lakshmibai-Seshadri paths and the quantum Schubert calculus, 第 5 回 MSJ Seasonal Institute "Schubert Calculus" Research Conference, 2012 年 7 月 26 日, 大阪市立大学 (大阪府・大阪市).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内藤 聡 (NAITO, Satoshi)
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 60252160

(2) 連携研究者

(計 3 名)

斉藤 義久 (SAITO, Yoshihisa)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 20294522

加藤 周 (KATO, Syu)
京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 40456760

佐垣 大輔 (SAGAKI, Daisuke)
筑波大学・数理解析系・准教授
研究者番号: 40344866

(3) 研究協力者

Cristian Lenart
State University of New York at Albany・
Department of Mathematics and
Statistics・教授

Anne Schilling
University of California, Davis・
Department of Mathematics・教授

Mark Shimozono
Virginia Tech・Department of Mathematics・
教授