

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 29 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540021

研究課題名(和文) 保型表現の分岐成分：局所理論と L 特殊値

研究課題名(英文) Ramified components of automorphic representations: local theory and its application to special L-values

研究代表者

石川 佳弘 (ISHIKAWA, YOSHI-HIRO)

岡山大学・自然科学研究科・助教

研究者番号：50294400

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000 円

研究成果の概要(和文)：フェルマ予想(FLT)の様な数論の問題は、非常に広範で深い理論を駆使して研究される。FLTの証明をも含み、70年代より数論研究の支柱たり続けている Langlands プログラムに沿って、比較的小さい群 $U(3)$ の場合に、その分岐表現と付随する L - γ -因子を研究した。方針は、 L -関数を上の群を対称性にもつ保型形式という"関数"の積分変換で表示し、その積分の分岐因子をホイタッカー関数を通じて明示的に研究する。 $U(3)$ が実 Lie 群/ p -進不分岐群の場合には、期待通りの性質を持つホイタッカー関数を同定出来た。その応用として、標準 L -関数の全ての臨界特殊値に対し、その代数性を示した。

研究成果の概要(英文)：Number theory investigation usually involves quite vast area of deep mathematics, like as the Fermat Last Theorem does. The Langlands Program, which led to the settlement of FLT, has been the central strategy of arithmetic since 70s. We follow the LP to study the ramification theory of the group $U(3)$ representations in view point of L - γ -factors. Our approach is resorting to integral presentations of L -function of automorphic forms, whose ramified factors give us arithmetic info. The point is to find nice Whittaker functions appearing in the ramified factor. We can successfully detect where/which the nice ones are in the case of Real/unramified $U(3)$. As an application to the global problem, we got algebraicity result for all the critical values of twisted L -function of generic cuspidal representations on $U(3)$.

研究分野：整数論

キーワード：保型形式 表現論 γ -因子 H -周期

1. 研究開始当初の背景

分岐する素点に於いて 数論的对象の局所的振舞いを調べる分岐理論は、数論研究に於いて中心的課題の一つであり続けている。局所類体論は 完成された一つの典型である。その広範な一般化が、局所体上の代数多様体の分岐理論、ガロア表現の分岐理論として、斎藤毅氏により展開されている。一般に、数論の重要な問題の多くは、L-関数の性質として翻訳可能である。分岐理論もガロア表現に付随する L-関数の 関数等式に現れる ρ -因子の中に深く エンコードされているのである。しかし、数論的对象から代数的に定義される L-関数を直接に研究することは、一般には大変困難である。そこで「解析的に定義される保型 L-関数の研究に帰着させる」というのが、20 世紀中葉以降 数論研究の中心戦略となっている(Langlands 哲学)。保型表現の研究が、数論の問題に対して深い結果をもたらすのである。かのフェルマ予想も、一変数保型形式の L-関数 と 有理係数楕円曲線の L-関数の対応を示す事で解決されたのであった。

近年 L-関数の数論研究は 次の段階、即ち特殊値の研究に移行してきている。上の対応を通じて、更に深い数論的情報を L-関数から読み取ろうというのである。この段階に於いては、L-関数の分岐因子の精緻な研究が不可欠である。

代数的 L-関数のサイドには、多変数/高次元の場合にも、斎藤毅氏の ガロア表現の分岐理論、Rapoport, Haines 等の 算術的商多様体の悪い還元とニアバイ サイクルの理論など、高度に発達した研究がある。

しかるに、保型 L-関数については、まだまだ分岐因子の研究は 立ち遅れている。本質的に一変数保型形式の場合と同様に扱える GL(2)の保型表現については、深い結果が現れてきているものの、一般の群 G の保型表現に対しては、特殊な状況での散発的研究しかなかった。前課題に於いて、G が U(3)の場合に局所理論の整備を かなりの深度まで行った。これにより、定義すら等閑にされてきた多変数保型形式に対する保型 L-関数の分岐 L-因子、 ρ -因子を、表現に付随する Whittaker 関数の積分変換研究を経由することで、数論の局所的/大域的問題への応用に耐えうるレベルまで 明示的に研究できる素地が固まってきた。

2. 研究の目的

以上の研究状況に鑑み、本研究では、前研究課題で得られた結果の伸展と継承として、

「U(3)の保型 L-関数の局所理論の補完 及び、その大域問題への応用」を目的とする。ここで、大域的問題とは「L-関数の特殊値の研究」を意味し、局所的問題とは「 p -進リ一群 $G(Q_p)$ の許容表現 ρ_p の分岐理論」を指している。

3. 研究の方法

(1)<我々の方法>

保型 L-関数の研究法には、大きく分けて、あ) Eisenstein 級数の定数項を調べる Langlands-Shahidi の方法 と い) 表現の適切な模型から作られる積分を調べる Rankin-Selberg の方法 がある。保型表現の黎明期には、「あ)には限界があり い)の方針の方が強力であろう」と信じられていた。しかし、歴史は人々の期待を裏切ることとなる。90年代終わり頃、H.Kim の観察をブレイクスルーとし、あ)は保型 L-関数の研究に莫大な進展をもたらした。が、この"流行"も一段落を見、適用可能な場合は取り付くされた感がある。

本研究では、30 余年前の素朴な方針 い) に立ち帰り、Rankin-Selberg の積分を詳細に研究する事で、将来の数論研究に資すべき基礎を構築する。戦略は、「保型表現の局所成分 ρ_p に属する Whittaker 関数 W_p を明示的に調べる」という 至極単純だが "迂遠な"準備研究を要する 正面突破法である。

(2)<他の方法との比較>

L-関数の分岐因子を決定するだけなら、上の方針は"遠回り"をしすぎている。実際、保型表現が"generic"な場合、Whittaker 関数の漸近挙動だけから分岐因子は計算できる。これは、GSp(4)の場合は Takloo-Bighash が、U(2,1) の場合には 申請者が実行した。また、あ)の方針でも、"generic"な場合には Shahidi が 部分的結果を得ている。

それにも拘らず、我々が 敢えて明示的研究を志向する理由は、次の二点にある。

i) ゼータ積分を具体的に計算する事で、局所関数等式を ρ -因子の形まで調べられる。これにより、分岐表現 ρ_p の"解析的導手"が 定義でき、 ρ_p の分岐具合の不変量を得ると期待される。これは、GL(2)の triple L-関数に対して、Kudla, Rapoport, Yang の三氏が Steinberg 表現の場合に採った方法である。

更に、 ρ_p 自身の表現論的性質から決まる"代数的導手"(保型形式のレベルの局所的な対応物)との比較研究へのアプローチが見込まれる。群が SL(2), U(2) の場合には、Lansky と Raghuram による観察がある。

ii) 保型 L-関数の特殊値をゼータ積分を通じて研究する際、局所表現のモデルの中に"特別な関数"を見出すことが、肝要である。GL(2)の場合の Popa, Xue 達の研究では、S-W. Zhang が導入した "Whittaker new form"が、不可欠であった。GSp(4)の場合にもその存在を傍証する Roberts-Schmidt の研究がある。U(3)の場合にも宮内により条件付きではあるが、"new vector"見付けられている。

4. 研究成果

(1)本研究の目的は、長期的目標「リー群の表現に付随する特殊関数研究及び、その L-関数への応用」を群が比較的小さい U(3)の場合に具現化することであった。これは、

(Loc)前課題でやり残された場合の「分岐 L-因子 $L(s, \chi)$ を attain する "良い" 特殊関数の探査」、「 χ -因子 (s, χ) と表現 χ の分岐度合を測る 導手 $f(\chi)$ との関係究明」

(Glo)大域ゼータ積分の研究を通じて、「H-周期」と L-特殊値/留数の関係及び、その解析数論への応用

という大域/局所理論の二つから成り、本課題では保型 L-関数を表示する積分が"単純"な場合、即ち χ が generic な場合を主に扱った。

(2) 2012年度

(i) 昨年度の Work Shop 『H-periods, Functoriality and RTF』の局所理論に於ける Counterpart として、『H-distinction, Structure of $L^2(G/H)$ and Relative LLC』を企画し、現在までに知られている結果の Survey を行い、研究グループ内で知識の共有を図った。また、 $G=GL(n)$ の外で起こる障害とその対応策について討議を行った。

(ii)(Loc)について、
実 Lie 群 $U(2,1)$ の場合に、表現 χ に付随する良いホイタッカー関数を見付けることに成功した。これにより、単純な"ゼータ積分の Archimedean 理論は完成を見た。

(iii)安田は、 p -進 $GL(n)$ の Hecke 環指標による L - χ -因子に関する論文を公表した。都築は、 $SO(2,m)$ 上の正則保型形式の中心 L-特殊値の平均についての論文を公表した。

(3) 2013年度

(i)今後の発展研究への下準備として昨年度の Work Shop から、高次元化、一般化に必要な

な枠組みの模索に取り組んでいる。十一月には、この WS を更に発展/継承する形で、白馬整数論 WS 『球等質空間 G/H 上の調和解析』を組織、開催し、近接研究者と研究討議/情報交換を行った。また、Rutgers 大の Mao 氏を招聘し、L-特殊値と N-周期の関係について示唆を受けた。上 WS を含む多々の研究集会に於いて、本課題共同研究者を含む国内外の専門家と研究討議を行った。

(ii)(Loc)について、
昨年度に見つけた 良いホイタッカー関数を更に精査し、"単純な"ゼータ積分の Archimedean 成分と真の局所 L-因子とのズレを決定した。

(Glo)については、
上の(Loc)での結果を用いて、ゼータ積分から Harder 周期を取り出した。連携研究者 宮内の結果と併せて、幾つかの仮定の下、ユニタリ群 $U(2,1)$ の twisted 標準 L-関数の臨界特殊値についての有理性を得た。この成果は、1月 RIMS に於ける研究集会『保型形式および関連するゼータ関数の研究』で発表報告された。

(iii)宮内は、 p -進 Lie 群 $U(3)$ が分岐している場合にも、良いホイタッカー関数を見出した。また、不分岐 $U(3)$ の場合の結果:「良いホイタッカー関数の存在」、「 χ -因子 (s, χ) と導手 $f(\chi)$ との関係」を論文公表した。都築は、compact $U(n)$ の H-周期の平均の漸近挙動を調べることで、 $U(n)$ 志村多様体上の特殊サイクルの Hecke 作用が等分的であることを示した。

(4) 2014年度

(i)昨年度の白馬 WS の折に派生した問題を受け、Test Case として 対称ペア $(GL(n,E), GL(n,F))$ 、但し E/F は二次拡大を取り上げ、3月末の WS 『Structure of $L^2(G/H)$ 』を主催し、比較研究を行った。その成果として、これまでバラバラであった p -進 local な研究と Archimedean local な研究が、Global 問題に適する形で述べる事が可能であると分かった。

(ii)(Loc)については、
"単純な"ゼータ積分の"分解素点"上の成分については、いまだ手掛かりが掴めていない。

(Glo)について、
RIMS 研究集会での発表後、Hecke 体の有限次元性についての不備を都築に指摘されたが、このギャップを埋めることが出来た。また、宮内の(Loc)での結果により、有理性定理に含まれる幾つかの仮定が少し緩和された。ユニタリ群 $U(2,1)$ の場合には、(Glo)パートも完成に近付いている。

(iii) 宮内は, p -進 Lie 群 $U(3)$ が分岐している場合に, 彼のこれまでの結果を拡張した。また, $GL(n)$ の良いホイタッカー関数に関する論文を公表した。

(5) 今後の展望

「分岐 L -因子 $L(s, \chi)$ を表現するゼータ積分の成分の研究 及び, その L -特殊値への応用」という当初の目標も, 群が $U(3)$ で積分が "単純" な場合には完成に近付いてきた。次に向かうべき方向としては,

(i) 大域問題: $U(3)$ の "単純" でないゼータ積分に対して, これまでの研究結果の拡張

(ii) 局所問題: "単純" なゼータ積分の研究結果の高ランク群 $U(n, n+1)$ への拡張

が挙げられる。

また, 積残しとなっている "単純" でないゼータ積分 "分解素点" 上の成分の研究 及び, 本課題研究中に新たに付け加わった視点: ペア $(U(2,1), U(1,1))$ に対する "distinction" の p -進 local と Archimedean local での比較研究は, 将来の課題として継続研究していきたい。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 10 件)

(1) Masao Tsuzuki,
Spectral square means of central values of automorphic L -functions for $GL(2)$,
Memoire of AMS. 235 (2015), 1--129. (査読有り)

(2) 石川佳弘,
Towards rationality of critical values of the standard L -functions for $U(2,1)$,
京都大学 数理解析研究所講究録 1934 (2015), 40--51. (査読無し)

(3) Michitaka Miyauchi,
Whittaker functions associated to newforms for $GL(n)$ over p -adic fields,
Journal of Math. Soc. of Japan 66 (2014), 17--24. (査読有り)

(4) 安田正大,
多重ゼータ値の Hoffman 基底,
京都大学 数理解析研究所講究録 別冊 B51 (2014), 375--433. (査読有り)

(5) 石川佳弘,
Whittaker new vectors for discrete representations of real Lie group $U(2,1)$,
京都大学 数理解析研究所講究録 1826

(2013), 18--23. (査読無し)

(6) Michitaka Miyauchi,
On local newforms for unramified $U(2,1)$,
Manuscripta Math. 141 (2013), 149--169. (査読有り)

(7) Michitaka Miyauchi,
Conductors and newforms for non-supercuspidal representations of unramified $U(2,1)$,
J. of the Ramanujan Math. Soc. 28 (2013), 91--111. (査読有り)

(8) Michitaka Miyauchi,
Local newforms and formal exterior square L -functions,
The International J. of Number Theory 09 (2013), 1995--2010. (査読有り)

(9) Kondo, Satoshi; Yasuda, Seidai,
Local L and epsilon factors in Hecke eigenvalues,
Journal of Number Theory 132 (2012), 1910--1948. (査読有り)

(10) Masao Tsuzuki,
Spectral average of central values of automorphic L -functions for holomorphic cusp forms on $SO_0(m,2)$,
Journal of Number Theory 132 (2012), 2407--2454. (査読有り)

[学会発表] (計 18 件)

(1) 石川佳弘,
Why real local again now? --Towards Archimedean relative LLC--,
Work Shop 「Structure of $L^2(G/H)$ --local Galois case--」, 2014 年 03 月 28 日, 岡山大学 理学部.

(2) 石川佳弘,
Description of $GL(n; \mathbb{C})^\wedge$ by derived functor modules,
Work Shop 「Structure of $L^2(G/H)$ --local Galois case--」, 2014 年 03 月 29 日, 岡山大学 理学部.

(3) 高野啓児,
 $GL(n; F)$ -distinguished representations of $\text{Res}_{E/F} GL(n)$,
Work Shop 「Structure of $L^2(G/H)$ --local Galois case--」, 2014 年 03 月 29 日, 岡山大学 理学部.

(4) 安田正大,
有限実多重ゼータ値と p -進多重ゼータ値,
第 20 回関西多重ゼータ研究会 & 第 7 回多重ゼータ研究集会, 2014 年 02 月 23 日, 九州大学 伊都キャンパス

(5)石川佳弘,
On special value of the standard
L-function for $U(2,1)$,
研究集会「保型形式および関連するゼータ関
数の研究」, 2014年01月21日, 京都大学 数
理解析研究所.

(6)Yoshi-Hiro Ishikawa,
Explicit formula for Shalika function,
第16回整数論オースタムワークショップ, 13
年11月08日, 白馬ハイマウントホテル.

(7)Keiji Takano,
Relatively cuspidal/discrete/tempered
representations for symmetric spaces,
第16回整数論オースタムワークショップ, 13
年11月08日, 白馬ハイマウントホテル.

(8)Keiji Takano,
Relative subrepresentation theorem and
some related topics,
第16回整数論オースタムワークショップ, 13
年11月09日, 白馬ハイマウントホテル.

(9)Masao Tsuzuki,
Harmonic analysis on G/H and Plancherel
formula,
第16回整数論オースタムワークショップ,
2013年11月08日, 白馬ハイマウントホテル

(10)石川佳弘
Casselman-Shalika formula for Shalika
model,
第二回プレ白馬WS, 2013年10月05日, 上
智大学 理工学部.

(11)石川佳弘,
Global motivation: Jacquet's philosophy,
第一回プレ白馬WS, 2013年08月31日, 早
稲田大学 教育学部.

(12)石川佳弘,
Casselman-Shalika formula for
H-distinguished model
第一回プレ白馬WS, 2013年08月31日, 早
稲田大学 教育学部.

(13)石川佳弘,
H-distinction and Functorial Lift,
relative LLC,
Work Shop「H-distinction, Structure of
 $L^2(G/H)$ and Relative LLC」, 2013年03月
10日, 岡山大学 理学部.

(14)石川佳弘,
Casselman-Shalika type formula -- $GL(n)$
case--,
Work Shop「H-distinction, Structure of
 $L^2(G/H)$ and Relative LLC」, 2013年03月

11日, 岡山大学 理学部.

(15)高野啓児,
 L^2 -ness criterion and subrepresentation
theorem,
Work Shop「H-distinction, Structure of
 $L^2(G/H)$ and Relative LLC」, 2013年03月
10日, 岡山大学 理学部.

(16)安田 正大,
 GL_d の smooth 表現の Galois 圏的解釈と保
型 Euler 系,
九州代数的整数論 2013, 2013年02月13日,
九州大学.

(17)安田 正大,
Galois representations attached to Siegel
modular forms I, II,
第15回整数論オースタムワークショップ, 12
年11月01日, 白馬ハイマウントホテル.

(18)都築正男,
保型形式の周期の平均分布,
代数学シンポジウム, 2012年08月23日, 京
都大学.

6. 研究組織

(1)研究代表者
石川 佳弘 (ISHIKAWA YOSHI-HIRO)
岡山大学・自然科学研究科・助教
研究者番号: 50294400

(2)研究分担者
都築 正男 (TSUZUKI MASAO)
上智大学・理工学部・准教授
研究者番号: 80296946

安田 正大 (YASUDA SEIDAI)
大阪大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 90346065

高野 啓児 (TAKANO KEIJI)
明石工業高等専門学校・一般科目・准教授
研究者番号: 40332043

(3)連携研究者
宮内 通孝 (MIYAUCHI MICHITAKA)
大阪府立大学・高等教育推進機構・教育拠
点形成教員
研究者番号: 70533644