

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 17 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540030

研究課題名(和文)Weberの問題について

研究課題名(英文)On Weber's class number one problem

研究代表者

小松 啓一 (Komatsu, Keiichi)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：80092550

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)： Q を有理数の集合、 ζ_m を \cos の 2 の $m+1$ 乗分の m 乗根とし、 Q に ζ_m を附加した体を $B_{2,m}$ とする。 $p \neq 2$ が 16 で割れない奇素数 p について、 $B_{2,m}$ に 1 の原始 p の $n+1$ 乗乗根を附加した体と $B_{2,m}$ の間の p の n 乗次の中間体の類数を $h_{p,m,n}$ とすると、 $h_{p,m,n}$ の p -指数は n をどんなに大きくしても一定の数以下であることを示した。これは主な発表論文 [1] に発表されている。さらに l を素数とすると、 $B_{2,n}$ に 1 を附加した体 $B_{2,n}(1)$ の類数の 2 -指数が n をどんなに大きくしても、一定の数以下であることを 100000 より小なる l について示した。これは主な発表論文 [2] に発表されている。

研究成果の概要(英文)：Let p be a prime number, B_p the cyclotomic Z_p -extension of the rational number field Q , $B_{p,n}$ the n -th layer of B_p , $h_{p,n}$ the class number of $B_{p,n}$. We obtained the following:
Let p be a prime number which is not congruent to 1 or -1 modulo 16 . Then the p -part of the class number $h_{p,m,n}$ of $B_{2,m}B_{p,n}$ is bounded as n tends to infinity for the fixed m . We can see the result in [1].

研究分野：整数論

キーワード：岩澤理論 類数 Z_p -拡大

1. 研究開始当初の背景

類数 1 の実 2 次体が無限にあるかという Gauss の予想は、予想が提出されて 200 年たった今でも未解決の問題である。それどころか、類数 1 の代数体が無限にあるかという問題ですら未解決である。

この問題について、今から 120 年ほど前、Weber は有理数体 Q の Z_2 -拡大 B_2 の中間体の類数はすべて 1 ではないかという問題を提出した。

この Weber の問題については、Weber 本人が B_2 の 3 番目までの layer の類数が 1 であるということを示して以来、なんの進展もなかった。ここで、 B_2 の n 番目の layer とは、 B_2 の中間体で、有理数体 Q 上 2^n 次の体のことであり、このような体は唯一つ存在する。

1960 年以降、コンピューターの進歩により、Bauer (引用文献)、Cohn (引用文献)、Masley (引用文献) らが 4 番目の layer の類数が 1 であることを示している。さらにその後には、Linden (引用文献) が 5 番目の layer の類数が 1 であることを示した。

さらに、今世紀になって、堀江は引用文献、の研究の後、引用文献において、8 を法として 3 または 5 と合同であるような素数 l について、 l は B_2 のすべての layer の類数と素であることを示した。さらに堀江は、引用文献、と研究を進めている。

また、筆者は、引用文献、において、1000000000 より小なる素数 l について、 B_2 のすべての layer の類数が 1 と素であることを示した。さらに引用文献、において、16 を法として、3、5、7、9、11、13 と合同な素数 l についても、 B_2 のすべての layer の類数が 1 と素であることを示した。これは、堀江の引用文献の結果の一般化であった。

2. 研究の目的

本研究は、「類数 1 の代数体が無限に存在する」ことを示すことを最終目標としている。そのために、次の 3 つを本研究の研究目的とした。

- (1) 研究成果概要の $B_{2,n}$ の類数が、たくさんの素数で割れないことを確認する。
- (2) 総実な代数体 k と $B_{p,n}$ の合成体 $k_{p,n}$ について $k_{p,n}$ の類数の p -指数が有界であるという Greenberg 予想について、多くの k についてこれを確認する。
- (3) 虚 2 次体上のある種の Z_p -拡大の中間体の類数に対し、Weber の問題の類似を考える。

3. 研究の方法

代数的整数論のなかでも、円分体論、岩澤理論をもちいて研究した。

- (1) 研究目的 (1) については、Washington が開発した円分 Z_p -拡大の類数の p でない指数の有界性を示す手法をもちいてコンピューターで計算を行った。
- (2) 研究目的 (2) については、 p -進 L -関数とイデアル類群の関係を示す定理を用いた。

4. 研究成果

- (1) 研究目的 (1) については [] 以上の結果は残念ながら得られなかった。
- (2) 研究目的 (2) については、色々興味深い成果が得られた。まず、(1) で開発された手法をもちいて、16 を法として ± 1 と合同でない素数 p について、(2) の k を $B_{2,m}$ としたとき、すべての m について、Greenberg 予想が証明できた。さらに p -進 L -関数を用いて、10 万より小なる素数 l について $k=Q(\sqrt[l]{l})$ としたとき、 kB_2/k について Greenberg 予想が証明できた。この研究は、内外で注目を浴び、特に、Cambridge 大学の Coates 教授は大変興味をもち、自分の学生に類数 1 の虚 2 次体上で同様の結果が得られないか研究させている。また、(2) については、志村理論、特に、志村のアーベル多様体の等分点でアーベル拡大を構成する研究とのつながりが見え始めている。
- (3) 研究目的 (3) については、次のような結果が得られた。 p を虚 2 次体 F で P 、 P' と完全分解する素数とし、 F を P のみ分岐する F の Z_p -拡大とする。 F_n を F/F の p^n 次中間体とし、 e_n を F_n の類数の p -指数とする。このとき、modular unit をもちいて、具体的に e_n を計算するアルゴリズムを与えることができた。これをもちいて、 $p=3$ のとき、 F/F の p -不変量が 0 になることを F の判別式が 20000 より小なるときに証明した。

<引用文献>

H. Bauer, Numerische Bestimmung von Klassenzahlen reeller zyklischer Zahlkörper, J. Number Th., 1 (1969), 161--162.

H. Cohn, A Numerical study of Weber's real class number calculation,

Numer. Math. 2 (1960), 347-360.

T. Fukuda and K. Komatsu, Weber's class number problem in the cyclotomic Z_2 -extension of Q , Experimental Math., vol.18 (2009), 213-222.

T. Fukuda and K. Komatsu, Weber's class number problem in the cyclotomic Z_2 -extension of Q , II, J. Theor. Nombres Bordeaux, 22-2 (2010), 359-368.

T. Fukuda and K. Komatsu, Weber's class number problem in the cyclotomic Z_2 -extension of Q , III, Int. J. Number Theory, 7-6 (2011), 1627-1635.

K. Horie, Ideal class groups of Iwasawa-theoretical abelian extensions over the rational field, J. London Math. Soc., 66 (2002), 257-275.

K. Horie, Primary components of the ideal class group of the Z_p -extension over Q for typical inert primes, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 81 (2005), no.3, 40-43.

K. Horie, The ideal class group of the basic Z_p -extension over an Imaginary Quadratic Field, Tohoku Math. J., 57 (2005), 375-394.

K. Horie, Certain primary components of the ideal class group of the Z_p -extension over the rationals, Tohoku Math. J., 59 (2007), 259-291.

K. Horie and M. Horie, The narrow class groups of some Z_p -extensions over the rationals, Acta Arith., 135 (2008), no.2, 159-180.

K. Horie and M. Horie, The ideal class group of the Z_p -extension over the rationals, Tohoku Math. J., 61 (2009), 551-570.

K. Horie and M. Horie, The narrow class groups of the Z_{17} - and Z_{19} -extensions over the rational field, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 80-1 (2010), 47-57.

K. Horie and M. Horie, The ideal class group of the Z_{23} -extension over the rational field, Proc. Japan Acad., 85

(2009), Ser. A, 155-159.

F. J. van der Linden, Class number computations of real abelian number fields, Math. Comp., 39 (1982), 693-707.

J. M. Masley, Class numbers of real cyclic number fields with small conductor, Compositio math., 37 (1978), 297-319.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu, Manabu Ozaki and Takae Tsuji, 査読有, On the Iwasawa λ -invariant of the cyclotomic Z_2 -extension of $Q(\sqrt{p})$, Funct. et Approx. Comment. Math., vol.54.1 (2016), 7-17.

Takashi Fukuda, Kiichi Komatsu and Takayuki Morisawa, 査読有, Weber's Class Number One Problem, Iwasawa Theory 2012, Contributions in Mathematical and Computational Sciences, 7 (2014), 221-226.

Takashi Fukuda and Keiichi Komatsu, 査読有, On the Iwasawa λ -invariant of the cyclotomic Z_2 -extension of $Q(\sqrt{p})$, Funct. et Approx. Comment. Math., vol.51.1 (2014), 167-179.

Takashi Fukuda and Keiichi Komatsu, 査読有, Class number calculation using Siegel functions, LMS J. Comput. Math., vol.17 suppl.A (2014), 295-302.

Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu and Takayuki Morisawa, 査読有, On λ -invariant of Z_1 -extensions over real abelian fields of prime power conductors, Funct. et Approx. Comment. Math., vol.47.1(2012), 95-104.

[学会発表](計 2 件)

小松啓一, 福田隆, モデューラー単数を用いた類数計算の例, 第13回北陸数論研究集会, 2014年12月25日, 金沢大学サテライトプラザ(石川県・金沢市)

Takashi Fukuda, Keiichi Komatsu and Takayuki Morisawa, Weber's class number one problem, Iwasawa 2012, 2012年7月27日, ハイデルベルグ(ドイツ).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小松 啓一 (KOMATSU Keiichi)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：80092550