

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540032

研究課題名(和文) 旗多様体の同変K理論におけるシューベルト類と特殊多項式

研究課題名(英文) Schubert classes in the equivariant K-theory of flag varieties and related special polynomials

研究代表者

池田 岳 (IKEDA, Takeshi)

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：40309539

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：一般旗多様体の同変K理論におけるシューベルト類を研究するため、シューベルト基底に対する良い多項式代表を見いだすことを目指した。シューベルト類の積構造定数を研究することが目的である。

極大等方グラスマン多様体のK理論的同変シューベルト類を代表する関数を導入した。この結果に基づき直交型の場合に構造定数に対する予想を得た。同じアイデアに基づいて、リトルウッド・リチャードソン規則のK理論版の短い証明を得た。シンプレクティック型のグラスマン多様体の同変シューベルト類に対してパフフィアン和公式を示し、幾何的な手法により同変K理論にまで拡張した。極大等方グラスマン多様体の量子同変コホモロジーの環の表示も得た。

研究成果の概要(英文)：We studied the Schubert classes in the equivariant K-theory of generalized flag varieties G/P . First aim is to find good polynomial representatives for the Schubert basis. Second aim is to study the multiplicative structure constants of the Schubert basis by using the obtained polynomials.

We introduced the K-theoretic factorial P- and Q-functions which have several expressions both closed and combinatorial, and represent the Schubert basis of the maximal isotropic Grassmannians. Based on this result, we are able to formulate a conjecture for the structure constants for the maximal orthogonal Grassmannians in K-theory. By using the same underlying idea, we obtained a short proof of Littlewood-Richardson rule in K-theory. We also proved a Pfaffian sum formula for the symplectic Grassmannian in equivariant cohomology, and extended it to equivariant K-theory by using geometric technique. We also obtained a result for the equivariant quantum cohomology of maximal isotropic Grassmannians.

研究分野：代数幾何学, 組合せ論, トポロジー

キーワード：旗多様体 K理論 シューベルト類

1. 研究開始当初の背景

- (1) 一般旗多様体 G/P のコホモロジー環におけるシューベルト類に関して、 G が古典型の場合には Billey-Haiman の多項式がシューベルト類に対して性質の良い代数的対応物として知られていた。
- (2) Billey-Haiman の多項式を同変コホモロジーに拡張し、二重シューベルト多項式 (Takeshi Ikeda, Leonardo Mihalcea, Hiroshi Naruse, 2011, Adv. Math. 226, 840-886) という特殊多項式族が得られていた。
- (3) A 型の場合には二重 Grothendieck 多項式と呼ばれる多項式が Lascoux-Schutzenberger により導入されていた。しかし、B,C,D 型についてはまだそのような良い多項式が知られていなかった。

2. 研究の目的

二重シューベルト多項式を同変 K 理論に拡張すること、およそそれを応用してシューベルト構造定数の明示的な記述を与えることが目的である。

3. 研究の方法

トーラス作用に関する局所化の手法および特異点解消を用いる幾何学的な手法をあわせて用いる。
構造定数の解明には組合せ論的手法を用いる。特にステンブリッジによるリトルウッド・リチャードソン規則の短い証明を拡張する。

4. 研究成果

- (1) G/P として直交型、およびシンプレクティック型の極大等方グラスマン多様体とするときに同変 K 理論におけるシューベルト類を研究した。その結果、我々が factorial GP, GQ 関数と呼ぶ対称関数を発見し、それらがシューベルト類を代表することが示された。また、この多項式に対する種々の表示が得られた。成瀬弘との共同。
本研究課題の基軸となる結果である。国内外において類似する結果はない。
- (2) グラスマン多様体の K 理論に対してシューベルト構造定数を記述する A. Buch による結果に対して、ステンブリッジの方向を拡張することにより極めて簡明な別証明を

与えることができた。島崎達史の共同。

同様の手法が更に幅広く拡張できることが期待できる。後述 (4) 参照。

- (3) 極大とは限らないシンプレクティック型グラスマン多様体の同変コホモロジーに対して、対応する二重シューベルト多項式をパフフィアンの和という形に明示的に記述することができた。松村朝雄戸の共同。

当初予期しなかった目覚ましい結果である。一つの結論として E. Wilson が提出していた予想を肯定的に解決できた。また、同様の結果を K 理論において幾何的な手法で示す研究に発展した。後述 (5) 参照。

- (4) 直交型の極大等方グラスマン多様体に対して、 K 理論的なシューベルト構造定数に関する明示的な予想を得た。Soojin Cho と中筋麻貴との共同。

前述の (2) の自然な展開である。この手法は更に拡張できることが期待できる。例えば、(2) の成果を同変 K 理論に拡張することは自然な課題である。現在、研究を進めている。

- (5) A 型および、極大とは限らないシンプレクティック型グラスマン多様体に対して、幾何学的な手法で K 理論的同変シューベルト類の閉じた公式を得た。(3) において代数的手法で得られたパフフィアン和公式が再現された。応用として、 GQ 関数の極大でない場合への拡張が見いだされた。Thomas Hudson, 松村朝雄, 成瀬弘との共同。

従来 Buch, Kresch, Tamvakis が raising operator を用いてコホモロジーにおける対応する問題に取り組んでいたが、本研究は従来に比べて結果の簡明さと手法の適用範囲の広さの意味で優れている。

ここで開発した幾何的な手法は Anderson-Fulton らの研究とも深く関係している。我々のグループはさらなる応用をすでに計画し、研究は進行している。

得られた多項式の組合せ的な性質を解明することは興味ある残された課題である。

- (6) 直交型およびシンプレクティック型の極大等方グラスマンに対して量子同変コホモロジー環の表示、

およびシューベルト類の自然な多項式代表を得た．成瀬弘，Leonardo Mihalcea との共同．

この結果は Mihalcea による Chevalley rule による環の特徴付けによっている．K 理論にも拡張できると期待できる．

- (7) B,D 型の二次超曲面に対して同変 K 理論の環として自然な表示を得た．Thomas Hudson, 松村朝雄, 成瀬弘との共同．

この研究は，結果 (5) を直交型に拡張するための準備として実施された．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Takeshi Ikeda, Lectures on equivariant Schubert polynomials, Adv. Stud. Pure Math., 査読有, (2015) 41 pages

Takeshi Ikeda and Tomoo Matsumura, Equivariant Giambelli formula for the symplectic Grassmannians --- Pfaffian sum formulas, Disc. Math. Theor. Comp. Sci. 査読有, (2015) 12 pages.
<http://fpsac.combinatorics.kr/program>

Takeshi Ikeda and Tomoo Matsumura, Pfaffian sum formula for the symplectic Grassmannians, , Math. Z., 査読有, (2015) 280: 269-306.

Takeshi Ikeda and Tatsushi Shimazaki, A proof of K-theoretic Littlewood-Richardson rules by Bender-Knuth-type involutions, Math. Res. Lett., 査読有, 2014, 21. 333-339.

Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse, K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q-functions, Adv. Math. 査読有, (2013) 243, 22-66.

[学会発表](計 15 件)

How Schur Q-functions are applied to geometry, Seminar at Center of Geometry and Physics, POSTECH , Pohan, Korea, 2015/3/11.

Giambelli type formulas in K-theoretic Schubert calculus, 立教大学理学部数学教室, 第 6 回立教大学数理物理学研究センターセミナー 2014/7/4.

幾何学と表現論の不思議な一致、シューア Q 関数をめぐって, 上智大学理工学部情報理工学部, 談話会, 2014/6/20.

K 理論的シューベルト・カルキュラス入門 I,II,第 17 回代数群と量子群の表現論, 富山市, 呉羽ハイツ, 2014/6/2-3.

Pfaffian sum formula for the symplectic Grassmannians, Special seminar (GTM seminar) at IPMU, 東京大学 カブリ数物連携宇宙研究機構, 2014/3/24.

古典型旗多様体の K 理論, 日本数学会年会, 代数学分科会特別講演, 学習院大学 2014/3/16.

Pfaffian sum formula for the symplectic Grassmannians, 表現論セミナー, 京都大学数理解析研究所, 2014/2/7.

How to compute Schubert classes, Toric topology 2014 in Osaka, 大阪市立大学理学部, 2014/1/21.

Schur Q 関数の K 理論的類似, 大阪表現論 seminar, 大阪駅前第 2 ビル大阪市立大学文化交流センター, 2013/10/21.

K 理論的 Schur P 関数の Littlewood-Richardson 規則に向けて, 組合せ論的表現論の展望, 京都大学数理解析研究所, 2013/10/10.

ベクトル束の退化跡公式とヤング盤の一般化, 第 4 回トロピカルセミナー, 青山学院大学理工学部, 2013/9/10.

A proof of K-theoretic Littlewood-Richardson rule, 第 16 回代数群と量子群の表現論, 箱根市強羅, 青雲荘 2013/6/2.

Symplectic affine Grassmannian の同変 Schubert 類, Combinatorial representation Theory and related topics, 京都大学数理解析研究所, 2012/10/9.

Kostant-Kumar の nil-Hecke 代数, ホップ代数と量子群--- 応用の可能性, 京都大学数理解析研究所, 2012/9/30.

Equivariant Schubert polynomials,
5-th MSJ-SI, Schubert calculus, 大阪市
立大学, 2012/7/17-20.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.xmath.ous.ac.jp/~ike/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池田 岳 (IKEDA, Takeshi)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号: 40309539

(2) 連携研究者

成瀬 弘 (NARUSE, Hiroshi)
山梨大学・教育人間科学部・教授
研究者番号: 20172596