

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：25403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540046

研究課題名(和文) 正標数の閉体上で定義された代数多様体の研究

研究課題名(英文) Research on algebraic varieties defined over an algebraically closed field in positive characteristic

研究代表者

齋藤 夏雄 (Saito, Natsuo)

広島市立大学・情報科学研究科・講師

研究者番号：70382372

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：正標数の代数的閉体上において定義された滑らかな del Pezzo 曲面の F 分裂性について研究を行った。次数 2 の del Pezzo 曲面について調べ、標数 2 および 3 のときにのみ F 分裂性を持たないものが実際に存在することを示し、その特徴づけを与えた。特に標数が 3 のとき、F 分裂性を持たない del Pezzo 曲面は一意的に定まることを明らかにした。さらに、次数 2 で標数 3 の del Pezzo 曲面 F 分裂性を持たないものが得られるような射影平面のブローアップを考えたとき、その中心となる 7 点の配置を完全に決定した。

研究成果の概要(英文)：We study the F-splitting of smooth del Pezzo surfaces defined over an algebraically closed field in positive characteristic. We investigate del Pezzo surfaces of degree 2, and give characterizations of non-F-split del Pezzo surfaces, which exist only in characteristic 2 or 3. In particular, we show that non-F-split del Pezzo surfaces of degree 2 are uniquely determined if the characteristic is 3. Moreover, we determine completely the configuration of 7 points on the projective plane, which are the center of the blow-ups to obtain the non-F-split del Pezzo surface of degree 2 in characteristic 3.

研究分野：代数幾何学

キーワード：正標数 代数多様体 del Pezzo 曲面 F 分裂性

1. 研究開始当初の背景

代数的閉体上で定義された代数多様体を双有理写像によって定まる同値類によって分類することは、代数幾何学における大きな目標の一つである。基礎体の標数が0であるときは、1980年代までに森、川又、Shokurov、Reidら多くの数学者の寄与によっていわゆる極小モデルプログラムが開発され、3次元代数多様体の分類は一応の完成を見た。現在はより高次元の多様体の分類を目指した研究が活発に行われている。また極小モデルプログラムの進展とともに、Fano多様体やCalabi-Yau多様体と呼ばれる多様体のクラス分類理論における重要性が、ますます認識されるようになった。滑らかな3次元Fano多様体は森、向井らによって完全に分類され、現在は主にlog Fano多様体を始めとする特異点付きのFano多様体についての研究が進んでいる。また、Calabi-Yau多様体は数理論理との関連性も指摘されている。

一方、基礎体の標数が正であるときは、多様体の分類を行ううえで重要な役割を果たす定理が成立しないため、研究は最近まで立ち遅れていた。しかし近年になり、この分野も急速な発展を見せている。標数0と正標数の世界を結ぶ強力な手法として現在注目されているのが、いわゆるF特異点の理論である。Frobenius写像を利用して定義される諸概念によって、標数0の多様体をその正標数への還元と結びつけて論じることが可能になり、多数の研究結果が発表されている。特にF分裂と呼ばれる概念は、正標数体上の多様体を調べるうえで有用な道具として、近年注目を集めている。

こうした状況の中、本研究の研究代表者は、正標数の3次元Fano多様体でPicard数が2であるものを分類したほか、森重文氏との共同研究で3次元Fano多様体でワイルドな2次曲線束と呼ばれる構造を持つものを完全に特定した。また、廣門正行氏、伊藤浩行氏との共同研究で、標数0にリフトしないような3次元Calabi-Yau多様体を標数2および3で構成したほか、正標数での局所的な特異点構造に注目し、標数3において1次元軌跡が有理二重点の非自明な変形であるような標準特異点が存在することを示した。

2. 研究の目的

前項のような背景をふまえ、本研究においては、正標数の代数的閉体上で定義された代数多様体の分類理論を構築するにあたり、分類の障害となるような正標数独特の構造や性質を持った多様体を決定し、その特徴を詳しく解析することを目的とした。具体的には、Fano多様体やCalabi-Yau多様体を始めとする代数幾何学における重要な多様体のクラスに対して正標数特有の病的現象を持ったものを抽出する大域的研究をベースに、低標数における特異点の特殊な構造を調べる局所的研究も行うことによって、正標数の代数

幾何学の諸相を明らかにすることを目指した。

- (1) まず大域的研究として研究対象としたのは、正標数においてF分裂性を持たないようなdel Pezzo曲面、および3次元Fano多様体である。先行研究により、標数0のFano多様体は、十分大きな標数に対してF分裂性を持つことがすでに知られていた。このことは、低標数においてはF分裂性を持たないという顕著な性質を持ったFano多様体が存在し得ることを示唆している。そこで、まず2次元Fano多様体であるdel Pezzo曲面についてF分裂しないものを特徴づけることを目指した。
- (2) もう一つの大域的研究として、標数0へのリフトの不可能性、あるいは標数0におけるSardの定理の正標数における反例となるようなファイブレーションの構造など、正標数特有の病的な性質を持つ多様体を構成することを考えた。
- (3) 次に局所的な研究として、正標数の特異点の半普遍変形空間に注目し、この空間内に存在する等特異空間と呼ばれる部分空間の構造を採り上げることとした。標数0においては、有理二重点は自明な等特異空間しか持たないことが知られているが、正標数では必ずしもこれは成り立たない。すでにこれまでの研究によって、標数3の場合に実際に非自明な等特異空間を持つ有理二重点が存在することが明らかになっており、まず残された標数2の有理二重点の場合を解決すること、さらに楕円型特異点を始めとするその他の特異点に対しても考察を行い、等特異空間の構造を決定することを目指した。

3. 研究の方法

前項のような目的を達成するため、次のようなアプローチで研究を行うこととした。

- (1) まずdel Pezzo曲面のF分裂性に対しては、原伸生氏と本間正明氏による先行研究に注目した。原は、正標数の体上のdel Pezzo曲面は、
 - 次数が3で標数が2であるとき
 - 次数が2で標数が2,3であるとき
 - 次数が1で標数が2,3,5であるとき
 のいずれかでない限り必ずF分裂性を持つことを示す一方、特にdel Pezzo曲面の次数が3であるときは、標数が2のFermat型3次曲面はF分裂性を持たないこと、またF分裂性を持たない次数3のdel Pezzo曲面はこれに限られることを指摘した。また本間は、以下の定理のような標数2のFermat型3次曲面の特徴づけを与えた：

定理 k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とし、 X を滑らかな3次曲面とする。このとき、

次の各条件は同値である：

- (i) $p=2$ で, X は Fermat 型 3 次曲面である．
- (ii) X の反標準因子の線形系の滑らかなメンバーは, すべて超特異楕円曲線である．
- (iii) X を射影平面の 6 点ブローアップとして与えたとき, 6 点は以下の条件を満たす一意的な配置となる．
条件：6 点のうちどの 5 点を通る 2 次曲線を考えても, その 2 次曲線のすべての接線が残った 1 点を通る．

本研究では, 次数 2 の del Pezzo 曲面に対し, この本間の結果に相当するような形で F 分裂性を持たない del Pezzo 曲面を特徴づけることを目指した．すなわち, 次数 2 の del Pezzo 曲面を射影平面の 7 点を中心とするブローアップによって得たとするとき, この曲面が F 分裂性を持たないことが 7 点の幾何的配置にどのような影響を与えるかを考察した．

- (2) Sard の定理の正標数における反例として重要なものの一つに, 準楕円曲面がある．そこでまず, 小平次元 1 の準楕円曲面で多重標準因子の線形系が定める写像が常に準楕円曲面の構造射となるような多重度 m の最小値を調べる．これは楕円曲面において桂と上野によって得られた結果を準楕円曲面で考察しようとするものであり, すでに標数 3 の準楕円曲面については結果が得られている．そこで残された標数 2 の場合に取り組む．

また, 準楕円曲面の一般ファイバーはカスプを持った有理曲線であり, A_2 型の 1 次元単純特異点の変形空間からの写像が定まる．そこで次項で述べる特異点の等特異空間の研究を応用することで, 特殊なファイブレーション構造を持った多様体を構成することを目指す．

- (3) 有理二重点の半普遍変形空間を考えると, 正標数においては, 非自明な等特異空間が存在し得る．さらに正標数では, 特に標数が 2,3,5 のとき, 有理二重点はその幾何的状況が定義方程式と必ずしも一対一に対応しない．特に標数 2 においては一つの特異点の型に対して定義方程式がいくつも存在し, それぞれで半普遍変形空間も等特異空間も異なることが, 問題を複雑にしている．ここでは標数 2 の有理二重点のすべてについて, Greuel-Kröning の方法にしたがって等特異空間の計算を試みる．本研究は, 連携研究者の伊藤浩行氏と協力して行う．

4. 研究成果

- (1) 正標数の代数的閉体上で定義された次数 2 の滑らかな del Pezzo 曲面で F 分裂性を持たないものについて調べ, 以下の結果を得ることができた：

定理 k を標数 $p>0$ の代数的閉体とし, X を次数 2 の滑らかな del Pezzo 曲面とする．このとき, 次の各条件は同値である：

- (i) $p=2$ または 3 であり, X を射影平面の二重被覆として見たとき, その分岐曲線は
 - $p=2$ なら二重直線
 - $p=3$ なら Fermat 型 4 次曲線
- (ii) X は F 分裂性を持たない．
- (iii) X の反標準因子の線形系の滑らかなメンバーは, すべて超特異楕円曲線である．
- (iv) X を射影平面の 7 点を中心とするブローアップによって得たとするとき, 7 点は以下の条件を満たす配置となる．特に標数が 3 のときは, この条件を満たす配置は一意的に定まる．
条件：7 点のうちどの 5 点を通る 2 次曲線を考えても, 残りの 2 点を通る直線がその 2 次曲線に接している．

本定理を含む結果をまとめた論文は, 現在投稿中である．

また, 次数 1 の del Pezzo 曲面についても研究を行い, F 分裂性を持たない del Pezzo 曲面は標数 2,3,5 で実際に存在することを示した．また次数が 3 や 2 のときと異なり, F 分裂性を持たないことと反標準因子の線形系のメンバーがすべて超特異楕円曲線であることは同値ではないことを指摘した．

さらに, 3 次元 Fano 多様体についても考察を行い, 標数が 11 までの 3 次元 Fano 多様体について, 実際に F 分裂性を持たないものが存在することを具体例の構成によって示した．

- (2) 標数 2 の準楕円曲面の多重標準因子の線形系が定める写像について研究を行った．これまでの考察により, この写像が準楕円曲面の構造射を常に与えるような多重度 m の最小値は, 楕円曲線上である種の重複ファイバーを持つような準楕円曲面の非存在に帰着されることが明らかになっている．これを解決するために, 問題の曲面の純非分離被覆で得られる有理曲面の構造の解析などを試みたが, 満足のいく結果は得られなかった．これは今後の研究課題である．
- (3) 標数 2 の有理二重点それぞれに対して半普遍変形空間を考え, その等特異空間を計算した．計算がきわめて煩雑なため整理するにはもう少し時間を要するが, すべての有理二重点に対し, それぞれの等特異空間の次元と構造を明らかにすることができた．これについては, 現在論文としてまとめているところである．

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

Natsuo Saito, “Characterization of non-F-split del Pezzo surfaces”, 城崎代数幾何学シンポジウム報告集, 査読なし, pp.3-10, 2016年3月.

[学会発表](計 8 件)

Natsuo Saito, “F-splitting and Fano varieties”, Higher dimensional algebraic geometry and around, 2016年2月4日, 京都大学.

Natsuo Saito, “Characterization of non-F-split del Pezzo surfaces”, 城崎代数幾何学シンポジウム, 2015年10月20日, 城崎国際アートセンター.

齋藤夏雄「F分裂性と del Pezzo 曲面」, 農工大数学セミナー2015, 2015年6月24日, 東京農工大学.

齋藤夏雄「F分裂性をもたない del Pezzo 曲面について」, 第9回代数曲面ワークショップ, 2015年5月16日, 首都大学東京.

齋藤夏雄「del Pezzo 曲面の F 分裂性について」, 野田代数幾何学シンポジウム, 2015年3月16日, 東京理科大学.

齋藤夏雄, “F-splitting and Fano varieties”, 第13回アフィン代数幾何学研究集会, 2015年3月5日, 関西学院大学.

齋藤夏雄「F分裂しない del Pezzo 曲面の特徴づけについて」, 都の西北代数幾何学セミナー, 2014年3月17日, 早稲田大学.

Natsuo Saito, “On del Pezzo surfaces of Fermat type in positive characteristic”, 第12回アフィン代数幾何学研究集会, 2013年9月5日, 関西学院大学.

6. 研究組織

(1)研究代表者

齋藤 夏雄 (SAITO, Natsuo)

広島市立大学・大学院情報科学研究科・講師

研究者番号: 70382372

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

伊藤 浩行 (ITO, Hiroyuki)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号: 60232469