

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540054

研究課題名(和文) 永田予想への代数的アプローチ

研究課題名(英文) An algebraic approach to Nagata conjecture

研究代表者

蔵野 和彦 (Kurano, Kazuhiko)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：90205188

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：正規射影代数多様体のCox環のような Z - n 型の次数付整閉整域に関しては、その因子類群や標準加群の記述に関して様々な研究がある。ここでは、 N - n 型の次数付整閉整域に関して因子類群や標準加群の記述を行った。次数半群 N - n の境界で定義される因子分だけ Z - n 型の次数環とは違った結果が出てきた。Grothendieck群やChow群を数値的同値で割ると有限生成の格子が得られる。それに、実数体をテンソルして有限次元ベクトル空間を考える。そのベクトル空間の中で、CM錐(MCMの張る錐)を考える。そこには、基本類と呼ばれるサイクルが定義される。基本類がCM錐に入るかどうか議論した。

研究成果の概要(英文)：Many researchers studied the divisor class group and the canonical module of a Z - n -graded normal domain as Cox rings of normal projective varieties. We study the divisor class group and the canonical module for an N - n -graded normal domain. In order to describe them, we need some informations of divisors of the boundaries of N - n . We obtain lattices if we divide the Grothendieck group and the Chow group by numerical equivalence. We tensor the real number field R with them, and consider the R -vector spaces. Consider the CM cone (the cone spanned by MCM's). We define the fundamental class of a ring in the vector space. We discuss whether it is in CM cone or not.

研究分野：代数学

キーワード：永田予想 Cox環 symbolic power 有限生成

1. 研究開始当初の背景

永田予想とは、「複素射影平面の一般的な r 点をそれぞれ重複度 m 重以上で通る d 次の平面曲線があったとすると、 $d > \sqrt{r}m$ が成立する」というものである。1956年に永田雅宜が、ヒルベルトの第14問題(不変式系の有限性の証明)に反例を与えた時に提起した問題である。

この予想は非常に簡潔であるがゆえに、代数幾何学、特異点論、トポロジー、可換環論など多くの分野の研究者が様々なアプローチでこれに取り組んできた。しかし、提起されてから50年以上を経た現在に至ってもなお未解決である。

可換環論において古くから研究対象となってきた「スペースモノミアル曲線のシンボリックリース環の有限生成性の問題」が、永田予想と非常に深い関係にあるということが、最近、Cutkosky-蔵野によって明らかになった。これは、永田予想への一つのアプローチを与えている。

a, b, c を二つずつが互いに素な自然数とし、 \sqrt{abc} は有理数ではないとする。複素射影平面 CP^2 から a, b, c で定まる weighted 射影平面 X への自然な射 f を考える。つまり、 $s \rightarrow x^a, t \rightarrow y^b, u \rightarrow z^c$ によって定まる次数環の準同型 $C[s, t, u] \rightarrow C[x, y, z]$ に $Proj$ を取った射 $f: CP^2 \rightarrow X$ をみる。 X の一般的な一点 q とその逆像 $f^{-1}(q)$ を考える。逆像 $f^{-1}(q)$ は abc 個の点からなる。 $r=abc$ としよう。永田予想は複素射影平面の一般的な r 点に関する主張であるが、実は主張を充たすような r 点の組が一組でも存在すればよいのである。よって、一般的な r 点の代わりに、特殊な r 点 $f^{-1}(q)$ に対して永田予想と同じ主張が成立するかを考えることにする。実は、 $f^{-1}(q)$ が永田予想を充たす必要十分条件は、 X の q での爆発 Y が自己交点数が負である曲線の一つだけ持っている(つまり、例外曲線以外には自己交点数が負の曲線が無い)ことである。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、1956年に永田雅宜が「ヒルベルトの第14問題」に反例を与えたときに提起した予想(以下「永田予想」という)について、可換環論からのアプローチを試みることである。永田予想は非常に簡潔な主張であるので、多くの分野の研究者が興味を持っている。可換環論において古くから研究対象となってきた「スペースモノミアル曲線のシンボリックリース環の有限生成性の問題」は、永田予想と深い関係があることが最近分かった(Cutkosky-蔵野)。このことを使いながら、永田予想への3つのアプローチ(プロジェクト)を遂行する。

その3つのアプローチに関しては、「研究の方法」の欄で紹介することにする。

多項式環、あるいは正則局所環上の素イデアルのシンボリック・リース環が有限生成か? は、カウシックの問題として有名である。カウシックの問題は、永田予想、あるいはヒルベルトの第14問題と非常に深い関係を持つ。実際、カウシックの問題とヒルベルトの第14問題には、共通の反例が多く存在している。

本研究の今後の進展として、「何故、有限体上ではカウシックの問題の反例が作れないのか?」という新しい問題に繋がってゆくことを期待している。

3. 研究の方法

ここでは、永田予想に対して、次の三通りの代数的なアプローチを試みる。

テーマ : 永田予想に関連したあるイデアルのグレブナー基底を求めることによって、そのイデアルが0ではないことを示す。これは、組み合わせ論の問題に帰着される。重複度が小さいときは有効であることは確認されているが、一般的にこの方法が働くかは不明。これは、Elizondo氏との共同研究。

テーマ : 正標数で生成元が標数に依存することを証明して、標数0で「自己交点数が負の曲線は、例外曲線のみである」ということを示す試み。後藤-西田-渡辺では、この種の方法を用いて、非常に重要な例の構成に成功している。

テーマ : ある正標数で、あるスペースモノミアル曲線の定義イデアルのシンボリックリース環が有限生成でなければ、永田予想は直ちに従う。計算機を使った計算により、そうなのではないかと予想される例(標数2で $(a, b, c) = (11, 17, 27)$)の解析を行う。

4. 研究成果

正規射影代数多様体のCox環のような Z^n 型の次数付整閉整域に関しては、その因子類群や標準加群の記述に関して様々な研究がある。本研究では、 N^n 型の次数付整閉整域に関して因子類群や標準加群の記述を行った。次数半群 N^n の境界で定義される因子分だけ Z^n 型の次数環とは違った結果が出てきた。

超曲面孤立特異点上の二つの有限生成加群の tor_i は、 i が十分大きいときは長さ有限であるし(孤立特異点だから)長さは i に関して周期2になる(matrix factorizationより)。Hochsterは、その偶数番目と奇数番目の長さの差をテータ不変量と呼び、それを研究した。この論文では、そのテータ不変量は、Grothendieck群上での数値的同値に

関する同値類上では定数になることを示した。このことから、例えば、テータ不変量を計算することによって、3次元の孤立超曲面がUFDでなければ、因子類群はtorsion-freeであり、そこでは必ずDutta-Hochster-MagLauglin型の反例が構成可能であることを証明した。

Grothendieck群やChow群を数値的同値で割ると有限生成の格子が得られる。それに、実数体をテンソルして有限次元ベクトル空間を考える。ここでは、収束・発散などが議論できる。そのベクトル空間の中で、MCMの張る錐を考える。この論文では、MCM錐の基本性質を調べた。応用として、様々なHilbert-Kunz関数の様々な例を構成することに成功した。

Grothendieck群やChow群を数値的同値で割ると有限生成の格子が得られる。それに、実数体をテンソルして有限次元ベクトル空間を考える。そのベクトル空間の中で、CM錐(MCMの張る錐)を考える。そこには、基本類と呼ばれるサイクルが定義される。基本類がCM錐に入るかどうかは、ホモロジカル予想と関連して非常に重要である。この論文では、正標数の環で、有限フロベニウス表現型、あるいは、F-有理の場合に基本類がCM錐に入ることを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6件)

藏野和彦、The divisor class groups and the graded canonical modules of multi-section rings、Nagoya Math. J.、査読有、212、2013、139-157.

Hailong Dao、藏野和彦、Hochster's theta pairing and numerical equivalence、Journal of K-theory、査読有、14、2014、495-525.

藏野和彦、大田康介、Grothendieck群の中でのFrobenius順像の極限について、明治大学理工学部研究報告、査読有、第51号、2014、19-27.

藏野和彦、大田康介、On the limit of Frobenius in the Grothendieck group、査読有、Acta Math. Vietnam、40、2015、161-172.

Chin-Yi Chan、藏野和彦、The cone spanned by maximal Cohen-Macaulay modules and an application、Trans. Amer. Math. Soc.、査読有、368、2016、939--964

[学会発表](計 10件)

藏野和彦、MCM加群で張られる錐、第34回可換環論シンポジウム、2012年11月25日、IPC生産性国際交流センター(神奈川県・葉山町).

藏野和彦、The cone spanned by

Cohen-Macaulay modules and its applications、COMMUTATIVE ALGEBRA AND ITS INTERACTION WITH ALGEBRAIC GEOMETRY、2013年7月12日、マルセイユ(フランス)

藏野和彦、The cone spanned by Cohen-Macaulay modules and applications、代数幾何学城崎シンポジウム、2013年10月22日、城崎大会議館(兵庫県・城崎町).

藏野和彦、On the limit of Frobenius in the Grothendieck group、第35回可換環論シンポジウム、2013年12月6日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).

藏野和彦、Theta pairing and numerical equivalence、Commutative Algebra and its interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics、2013年12月19日、ハノイ(ベトナム).

藏野和彦、Pinkham-Demazure construction for normal \mathbb{Z}^n -graded rings、Commutative Algebra and Singularity Theory 2014、2014年7月28日、立山国際ホテル(富山県・富山市).

藏野和彦、Boundary of Cohen-Macaulay cone and asymptotic behavior of system of ideals behavior of system of ideals、第59回代数学シンポジウム、2014年9月8日、東京大学大学院数理科学研究科(東京都)

藏野和彦、次数環上の階数1のコーエンマコーレー加群について、可換環論と表現論 吉野雄二先生還暦記念研究集会、2014年10月12日、岡山大学理学部(岡山県・岡山市).

藏野和彦、On finite generation of symbolic Rees rings of space monomial curves、研究集会「特異点と不変量」、2015年12月15日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都市).

藏野和彦、A fan determined by a \mathbb{Z}^n -graded domain and \mathbb{Z}^n -graded Demazure construction、International Conference and the 8th Japan-Vietnam joint Seminar on Commutative Algebra、2016年3月21日、ハロン(ベトナム)

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.isc.meiji.ac.jp/~kurano/>

6．研究組織

(1)研究代表者

藏野 和彦 (KURANO, Kazuhiko)

明治大学・理工学部・数学科

研究者番号：90205188

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：