

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 5 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540055

研究課題名(和文) 対称性を持つ構成法で構成された配置のトーリック環の構造解析

研究課題名(英文) Toric rings of configurations constructed by a method with symmetries

研究代表者

大杉 英史 (Ohsugi, Hidefumi)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：80350289

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：トーリック環の幾何的な変形として、中心対称配置など、対称性を持つ配置構成法に注目し、トーリック環・イデアルの環論的性質について研究した。特に、中心対称配置よりも適用範囲が広く、多くの反射的凸多面体を生み出す、「調和する配置」を発明した。また、様々な組合せ論的な対象に付随するトーリックイデアルについて研究し、例えば、任意の有限半順序集合に対して、その順序凸多面体の中心対称配置が反射的凸多面体であることを証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied toric rings of configurations constructed by a method with symmetries such as a centrally symmetric configuration, and discussed various algebraic properties of toric rings and ideals. In particular, we introduced the notion of “configurations of harmony” which yields more reflexive polytopes than the notion of centrally symmetric configurations. In addition, we studied toric ideals arising from various combinatorial objects. For example, we showed that the convex polytope arising from the centrally symmetric configuration of any order polytope is a normal reflexive polytope.

研究分野：計算可換代数

キーワード：グレブナー基底 可換環

1. 研究開始当初の背景

トーリック環の生成系に対応するベクトル集合の凸閉包の正則三角形分割と、トーリックイデアルのグレブナー基底から導かれるイニシャルイデアルの根基イデアルの間には美しい対応が知られている。根基イデアルは、凸閉包の正則三角形分割のスタンレー・ライスマーイデアルと一対一の関係にあり、応用上重要な「三角形分割の単模性」は、三角形分割に対応するイニシャルイデアルがスクエアフリーな単項式で生成されることと同値である。トーリック環およびトーリックイデアルの性質と、対応する凸閉包の性質には強い関連性があるが、凸閉包の変形がもたらすトーリックイデアルへの影響については、凸閉包の積などに関する結果が散見されるのみであり、ほとんどの場合、未解明である。近年、トーリックイデアル、トーリック環に対して、重要なクラスの解析とともに、複数の配置から新しい配置を構成する方法が幾つか提起されている。代表的なものとしては、セグレ・ペロネーゼ配置、入れ子配置、トーリックファイバー積が挙げられ、それぞれについて、トーリックイデアルのグレブナー基底や、トーリック環の正規性などに関する結果が得られている。

研究代表者は、日比孝之氏との共同研究において、「中心対称配置」を定義した。これは、整数行列に対して、 -1 倍および原点を添加した行列を斉次化してできる配置であるが、特に、もとの整数行列が単模行列であるときには、トーリックイデアルはスクエアフリーなイニシャルイデアルを持ち、トーリック環は正規、ゴレンシュタインになるなど、非常に良い性質を持つ。したがって、この変形を活用すれば、上記の性質を持つトーリック環の豊富なクラスを生み出すことができる。例えば、柴田和樹氏との共同研究では、単模な行列として、有向サイクルの接続行列を考え、対応する反射的多面体（長さが奇数のサイクルの場合には、非特異ファノ多面体）を考察したが、対応するトーリックイデアルのグレブナー基底を構成することによって、エルハート多項式を求めたところ、エルハート多項式の根に関する幾つかの予想の反例を、非特異ファノ多面体という貴重な多面体の範疇で構成することに成功した。

2. 研究の目的

当該研究では、トーリック環の生成系に対応する整数ベクトル集合の凸閉包に対する幾何的な変形として、中心対称配置など対称性の高い構成法に注目し、トーリック環およびトーリックイデアルの以下のような環論的性質の変化等について、重点的に研究を行うことを目的とした。

(1) トーリックイデアルのグレブナー基底の構成、および、次数の分析

もとの配置のトーリックイデアルのグレ

ブナー基底から、新しい配置のグレブナー基底を構成する方法を模索する。また、トーリックイデアルが2次の二項式で生成されることや、2次の二項式からなるグレブナー基底を持つことは、それぞれトーリック環のコストル性に対する必要条件、十分条件として重要な意味を持つ。当該研究ではこのような条件がみたされるための条件を研究する。

(2) 整数行列の単模性と新しい配置の環論的性質の関連

グレイバー基底計算アルゴリズムに現れる重要な配置構成法の1つ、ローレンス持ち上げでは、もとの配置が単模であることと、構成される配置が正規であることは同値である。一方、整数行列が単模ならば、その中心対称配置は正規であるが、逆は成り立たない例が存在する。当該研究では、どのような条件のもとでこれらの条件が同値となるか研究する。また、ゴレンシュタイン性についても同様の考察を行う。

(3) 有限グラフに付随する配置

有限グラフの接続行列の中心対称配置については、その正規性が接続行列の単模性と同値であることが解明されている。他方、ゴレンシュタイン性については、接続行列が単模であることと同値であることが予想されているものの、ゴレンシュタインとなるための十分条件であることしか証明されていない。当該研究では、接続行列が単模ではないようなグラフに注目し、単模性が必要条件であることを証明することを目指す。

3. 研究の方法

「整数行列の中心対称配置」を軸とし、対称性の高い配置構成法によって構成されたトーリックイデアル、トーリック環の構造を研究する。トーリック環、トーリックイデアルの性質としては、トーリックイデアルの極小生成系、グレブナー基底、および、それらの次数や、スクエアフリーなイニシャルイデアルの存在、トーリック環の正規性・ゴレンシュタイン性を中心にして、有用な一般論の構築を目指す。特に、もとの整数行列、配置が単模である場合については、エルハート多項式、ヒルベルト関数（級数）や、各種の不変量についても研究する。

4. 研究成果

主に、以下の(1)～(5)について結果を得た。

(1) 中心対称配置とその一般化

① 順序多面体の中心対称多面体

日比氏、松田一徳氏、柴田氏との共同研究により、有限半順序集合の順序多面体の中心対称多面体が正規かつ反射的であることをグレブナー基底の理論を駆使して証明した。これは反射的多面体の新しいクラスの開拓

の端緒となる重要な成果である。

② ルート系に付随する配置の中心対称配置

青木敏氏、日比氏との共同研究により、複数の多水準因子の一部実施計画により得られる頻度データの分析方法について研究成果を得た。対数線形モデルの当てはまりを適当な検定統計量による条件付検定の p 値により判断し、さらにその p 値をマルコフ連鎖モンテカルロ法により数値計算するというアプローチは、Sturmfels と Diaconis により分割表解析の枠組みとして提案され、実験計画法の枠組みでは青木・竹村により定式化された。マルコフ連鎖モンテカルロ法を実行するための重要なステップとして、局外母数に対する十分統計量が観測値と一致するような標本空間上に既約なマルコフ連鎖を構成するためのマルコフ基底の計算があるが、マルコフ基底がトーリックイデアルの生成系として代数的に特徴付けられることを示したのが Sturmfels と Diaconis の発明である。共同研究では、D型のルート系に付随する配置の中心対称配置が 3 水準の Box-Behnken 計画に対する自然な統計モデルに対応することを示し、ある単項式順序に対するグレブナー基底を具体的に構成した。

③ 中心対称配置の一般化

日比氏との共同研究により、グレブナー基底理論を活用し、反射的多面体の新しいクラスを発見した。一般的な理論として、「調和する配置」という概念を導入し、2つの配置 A, B が逆辞書式順序に関するある条件を満たすならば、原点、 $A, -B$ の凸閉包は反射的多面体であることを証明した。条件を満たす配置の候補として、単体的複体に付随する配置が考えられるが、例えば、理想グラフの安定集合多面体の配置は単体的複体に付随するのみならず、圧搾配置であり条件を満たす。研究では、強理想グラフ定理を用いて、条件を満たす単体的複体は理想グラフの安定集合多面体に付随する単体的複体に限られることも証明した。

(2) 有限グラフに付随する配置

日比氏、西山絢太氏、鹿間章宏氏との共同研究により、有限グラフに付随するトーリックイデアルの生成系、および、グレブナー基底について、サスペンションによる性質の変化などについて重点的に研究を行った。もとのグラフのトーリックイデアルと、そのサスペンションのトーリックイデアルは、特別な部分配置の関係になっており、正規性や生成系の次数などが遺伝することが知られている。グラフに付随するトーリックイデアルがいつ 2 次生成となるかについてはグラフの言葉による特徴付けが知られているが、当該研究では、あるグラフのサスペンションとなっているようなグラフについて、同様の結果を得た。また、グレブナー基底についても分析

を行い、計算実験をもとに、以前構成された「付随するトーリックイデアルは 2 次生成であるが、2 次の二項式からなるグレブナー基底が存在しないような有限グラフ」の例を一般化し、同じ性質を持つグラフの非自明な無限系列を理論的に構成することに成功した。

(3) 半順序集合の多重鎖に付随する配置

日比氏との共同研究により、自然数 l を固定し、半順序集合の長さ l の (元の重複を許す) 多重鎖に対して単項式を対応させ、それらの単項式たちで生成されるトーリック環のトーリックイデアルについて研究した。特に、 l に依らず、2 次の二項式からなる生成系、あるいは、グレブナー基底を持つことと、半順序集合の比較可能グラフ (半順序集合の元全体を頂点集合とし、比較可能な 2 元を辺でつないだグラフ) がコーダルグラフ (長さが 4 以上の任意のサイクルがコードを持つグラフ) であることが同値であることを証明し、コーダルな比較可能グラフの可換代数的特徴付けとして非常に興味深い結果が得られた。証明においては、適切な単項式順序の構成において、比較可能グラフがコーダルであるときに保証される「強理想消去順序」が重要な役割を果たしている。また、対応する配置はペロネーゼ配置の部分配置であるが、ほとんどの場合にトーリック環が正規にならないという性質を持つ。ペロネーゼ配置などに対してこれまでに構成されたほとんどのグレブナー基底はスクエアフリーなイニシャルイデアルに対応し、トーリック環が正規であることを保証するから、既知のグレブナー基底とは明確に異なる。

(4) 切断多面体のトーリックイデアル

有限グラフの切断多面体に付随するトーリック環およびトーリックイデアル (切断イデアル) について研究した。このトーリックイデアルについては、グラフのある種のクリーク和 (頂点、辺、三角形に沿って、2 つのグラフを貼り合わせる操作) が、良いトーリックファイバー積に対応することが知られており、変形による環論的性質の変化を調べる上で有意義な例となっている。また、有限グラフのサスペンションの切断イデアルの生成系は、そのグラフに対応するバイナリーグラフモデルのマルコフ基底であることが知られている。

① 実験計画問題への応用

青木氏、日比氏との共同研究により、グラフの切断イデアルの生成系が、ある種の実験計画問題 (レギュラーな 2 水準一部実施計画) に応用できることを証明した。特に、グラフマイナーをとる操作などに関する既存の結果を活用すれば、定義関係が高々 2 つの一部実施計画のマルコフ基底が 2 次の二項式からなる生成系として得られることが分かる。

② ゴレンシュタイン性

クリーク和や、マイナーをとる操作で性質が遺伝しないことが知られている、切断多面体のトーリック環のゴレンシュタイン性について研究し、切断多面体のトーリック環が正規かつゴレンシュタインとなるグラフを完全に分類することに成功した。

(5) 強コスツルなトーリック環

松田氏との共同研究により、トーリック環の強コスツル性について、十分条件を与えた。この十分条件は、Rustuccia と Rinaldo が一般の代数に対して与えた十分条件をトーリック環に限定して得られる条件 (任意の逆辞書式順序に関して、被約グレブナー基底が 2 次の二項式から成るならば、トーリック環は強コスツル) の拡張になっているだけでなく、トーリック環がスクエアフリーな単項式で生成される場合には、必要十分条件になっている。また、Rustuccia と Rinaldo は彼らの十分条件が必要条件でもあると予想したが、その反例を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① Ginji Hamano, Takayuki Hibi, Hidefumi Ohsugi, Ehrhart series of fractional stable set polytopes of finite graphs, *Annals of Combinatorics*, 査読有, 掲載確定, (2017)
- ② Hidefumi Ohsugi, Takayuki Hibi, Reverse lexicographic squarefree initial ideals and Gorenstein Fano polytopes, *Journal of Commutative Algebra*, 査読有, 掲載確定, (2017)
- ③ Hidefumi Ohsugi, Takayuki Hibi, A Gröbner basis characterization for chordal comparability graphs, *European Journal of Combinatorics*, 査読有, 59 (2017), 122-128. Doi: 10.1016/j.ejc.2016.08.004
- ④ Kazunori Matsuda, Hidefumi Ohsugi, Reverse lexicographic Gröbner bases and strongly Koszul toric rings, *Mathematica Scandinavica*, 査読有, 119 (2016), 161-168. Doi: 10.7146/math.scand.a-24741
- ⑤ Satoshi Aoki, Takayuki Hibi, Hidefumi Ohsugi, Markov chain Monte Carlo methods for the Box-Behnken designs and centrally symmetric configurations, *Journal of Statistical Theory and Practice*, 査読有, 10 (2016), no. 1, 59-72. Doi: 10.1080/15598608.2015.1067172
- ⑥ Takayuki Hibi, Kazunori Matsuda, Hidefumi Ohsugi, Kazuki Shibata,

Centrally symmetric configurations of order polytopes, *Journal of Algebra*, 査読有, 443 (2015), 469-478.

Doi: 10.1016/j.jalgebra.2015.06.010

- ⑦ Hidefumi Ohsugi, Takayuki Hibi, Centrally symmetric configurations of integer matrices, *Nagoya Mathematical Journal*, 査読有, 216 (2014), 153-170. Doi: 10.1215/00277630-2857555
 - ⑧ Hidefumi Ohsugi, Takayuki Hibi, Toric ideals of finite graphs and adjacent 2-minors, *Mathematica Scandinavica*, 査読有, 114 (2014) 185-190. Doi: 10.7146/math.scand.a-17105
 - ⑨ Takayuki Hibi, Kenta Nishiyama, Hidefumi Ohsugi, Akihiro Shikama, Many toric ideals generated by quadratic binomials possess no quadratic Gröbner bases, *Journal of Algebra*, 査読有, 408 (2014), 138-146. Doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.09.039
 - ⑩ Hidefumi Ohsugi, Gorenstein cut polytopes, *European J. Combinatorics*, 査読有, 38 (2014), 122-129. Doi: 10.1016/j.ejc.2013.11.010
 - ⑪ Satoshi Aoki, Takayuki Hibi, Hidefumi Ohsugi, Markov chain Monte Carlo methods for the regular two-level fractional factorial designs and cut ideals, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 査読有, 143, Issue 10 (2013) 1791-1806. Doi: 10.1016/j.jspi.2013.06.009
 - ⑫ Hidefumi Ohsugi, Takayuki Hibi, Toric ideals and their circuits, *Journal of Commutative Algebra*, 査読有, 5 Number 2, (2013) 309-322. Doi: 10.1216/JCA-2013-5-2-309
- [学会発表] (計 21 件)
- ① 大杉英史, 日比孝之, グレブナー基底によるコーダルな比較可能グラフの特徴付け, 日本数学会 2017 年度年会, 2017 年 3 月 27 日, 首都大学東京 (東京都八王子市)
 - ② Hidefumi Ohsugi, Ehrhart series of fractional stable set polytopes of finite graphs, Workshop on Convex Polytopes for Graduate Students, 2017 年 1 月 24 日, 大阪大学 (大阪府吹田市)
 - ③ Hidefumi Ohsugi, Toric ideals of fractional factorial designs, RIMS workshop, Algebraic Statistics and Symbolic Computation, 2016 年 7 月 25 日, 京都大学 (京都府京都市)
 - ④ Hidefumi Ohsugi, Ehrhart series of fractional stable set polytopes, Homological and Computational Methods in Commutative Algebra, 2016 年 5 月 30 日, Cortona (イタリア)

- ⑤ 大杉英史, トーリックイデアルのグレブナー基底とその応用, 城崎新人セミナー, 2016年2月16日, 城崎市民センター(兵庫県豊岡市)
- ⑥ 大杉英史, トーリックイデアルの2次生成性と2次グレブナー基底, 計算代数システムによる新しい数学の開拓と発展, 2015年10月2日, 京都大学(京都府京都市)
- ⑦ 大杉英史, トーリックイデアルのグレブナー基底とその諸分野への応用, 2015年度秋季総合分科会(特別講演), 2015年9月13日, 京都産業大学(京都府京都市)
- ⑧ Hidefumi Ohsugi, Reverse lexicographic Gröbner bases and Gorenstein Fano polytopes, The 8th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute 「Current Trends on Gröbner Bases」, 2015年7月7日, ホテル日航大阪(大阪府大阪市)
- ⑨ 大杉英史, 柴田和樹, 日比孝之, 松田一徳, 半順序集合に付随する中心的対称多面体, 日本数学会2015年度年会, 2015年3月21日, 明治大学(東京都千代田区)
- ⑩ 大杉英史, Reverse lexicographic squarefree initial ideals and Gorenstein Fano polytopes, 第27回可換環論セミナー, 2015年1月27日, 静岡大学(静岡県静岡市)
- ⑪ 大杉英史, Gröbner bases of toric ideals and their application, 第5回AIMR ジョイントセミナー, 2014年10月31日, 東北大学(宮城県仙台市)
- ⑫ 松田一徳, 大杉英史, 逆辞書式グレブナー基底と強 Koszul トーリック環, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月26日, 広島大学(広島県東広島市)
- ⑬ 大杉英史, Toric rings and ideals of cut polytopes, 組合せ論と可換代数サマーセミナー2014, 2014年9月23日, 宮島コーラルホテル(広島県廿日市市)
- ⑭ 日比孝之, 松田一徳, 大杉英史, 有限グラフに付随する edge ring が強 Koszul となるための必定十分条件, 日本数学会2014年度年会, 2014年3月16日, 学習院大学(東京都豊島区)
- ⑮ 大杉英史, 鹿間章宏, 日比孝之, 森亜貴, 辺凸多面体の辺の個数の最大値, 日本数学会2014年度年会, 2014年3月15日, 学習院大学(東京都豊島区)
- ⑯ Hidefumi Ohsugi, A survey of toric rings and ideals arising from contingency tables, Computational Algebraic Statistics, Theories and Applications, 2014年1月21日, Kyoto Terrsa(京都府京都市)
- ⑰ Hidefumi Ohsugi, Toric rings and ideals of cut polytopes of graphs,

International conference on Commutative Algebra and its Interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics, 2013年12月19日, Hanoi(ベトナム)

- ⑱ 大杉英史, 鹿間章宏, 西山絢太, 日比孝之, グラフの二次トーリックイデアルと二次グレブナー基底, 日本数学会2013年度年会, 2013年9月25日, 愛媛大学(愛媛県松山市)
- ⑲ 青木敏, 大杉英史, 日比孝之, 2水準実験に対するマルコフ連鎖モンテカルロ法と切断イデアル, 2013年度統計関連学会連合大会, 2013年9月10日, 大阪大学(大阪府豊中市)
- ⑳ Hidefumi Ohsugi, Cut ideals and their application to regular designs in statistics, Combinatorial Commutative Algebra and Applications, 2012年12月3日-7日, Mathematical Sciences Research Institute, カリフォルニア州バークレー(アメリカ)

〔図書〕(計1件)

- ① 竹村彰通, 日比孝之, 原尚幸, 東谷章弘, 清智也, 「グレブナー道場」著者一同(大杉英史は著者一同に含まれる), 共立出版, グレブナー教室, 2015年, 205頁(著者一同は1~66頁を担当)

6. 研究組織

(1) 研究代表者
大杉 英史 (OHSUGI, Hidefumi)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 80350289

(2) 研究分担者
なし。

(3) 連携研究者
なし。

(4) 研究協力者
なし。