

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 13 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540060

研究課題名(和文)特異多様体上の留数理論とその応用

研究課題名(英文)Residue theory on singular varieties and its applications

研究代表者

諏訪 立雄 (SUWA, Tatsuo)

北海道大学・一・名誉教授

研究者番号：40109418

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者による特性類の局所化理論は複素解析幾何学において特性類に関わる諸問題を中心に広範囲の応用、発展をみていた。本研究では次の成果を得た。

(1) ベクトル束の準同型写像の退化問題に関し、普遍的局所化を構成した。(2) Lefschetz 一致点公式を拡張した。これには我々が導入した局所的大域的な一致ホモロジー類が重要な役割を果たす。(3) 相対 Bott-Chern コホモロジーの理論を展開しその応用を与えた。(4) 佐藤超関数の簡明な表示法を見出した。このため相対 Dolbeault コホモロジーの理論を整備拡充した。また超関数の各種演算を具体的に表した。

研究成果の概要(英文)：The localization theory of characteristic classes developed by the principal investigator turned out to be very effective in a wide range of problems related to characteristic classes mainly in complex analytic geometry. During the period, we obtained the following results.

(1) As to the degeneracy loci problem of vector bundle homomorphisms, we constructed a universal localization. (2) We generalized the Lefschetz coincidence point formula. For this, the local and global homology classes we introduced played key roles. (3) We developed the theory of relative Bott-Chern cohomology and give some applications. (4) We discovered a simple way of expressing Sato hyperfunctions. For this we strengthened the theory of relative Dolbeault cohomology. We also gave simple expressions of fundamental operations on the hyperfunctions.

研究分野：複素解析幾何学

キーワード：幾何学 複素解析幾何学 特性類の局所化 相対コホモロジー Alexander 双対性 留数 特異多様体 特異葉層構造

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は長年にわたり世界各地の研究者と特異多様体上のベクトル場の指数、複素解析の特異葉層構造の留数の研究を行って来た。ここで用いられた方法、得られた結果は葉層構造のみならず複素解析幾何学において特性類に関わる諸問題を中心に広範囲の応用、発展をみていた。これら諸問題には、特異多様体の特性類、交叉理論、Thom 類、埋込の Riemann-Roch、複素力学系への応用、Atiyah 類の局所化理論などがある。

2. 研究の目的

以上の課題の研究を継続し、特に次の課題につきこれを発展させる。

(1) ベクトル束の準同型写像の退化：これに関しては、所謂 Thom-Porteous の公式がある。これは現在 ambient 多様体のホモロジーの中で表せられているが、本来退化集合に局所化されるべきものである。これを Chern 類の Schur 多項式の普遍的局所化を構成することにより行う。

(2) 交叉理論：位相幾何学的、微分幾何学的に定義される Alexander 双対性を駆使して特に局所化された交叉理論を展開し、様々な応用を図る。

(3) Atiyah 類の局所化：これに関しては相対 Dolbeault コホモロジーの理論を深化させ、様々な応用（例えば Dolbeault 複体に対する Lefschetz 不動点定理の幾何学的な簡明な証明）を図る。

(4) 軌道体特性類の局所化およびそれに付随した留数として現れる種々の不変量を我々の観点より研究する。

3. 研究の方法

目的欄に述べた課題の研究を連携研究者、研究協力者の協力のもとに行う。

連携研究者のうち、足助は葉層構造の特性類、大本は特異多様体の特性類、ベクトル束準同型写像の退化問題、岡は特異点論の位相幾何的側面、竹内は特異点論の代数解析的側面、田島、中村は本研究で基本的な Grothendieck 留数の代数解析的研究及び計算、與倉は特異多様体の特性類、特にその関手的側面においてそれぞれ連携協力する。

海外研究協力者のうち、フランス、リュミニニ数学研究所 J.-P. Brasselet とは特異多様体の特性類の研究を継続する。イタリア、ローマ大学 F. Bracci、ピサ大学 M. Abate とは Atiyah 類、留数理論の複素力学

系への応用等の共同研究を継続する。

これら研究者とは Email、相互訪問による研究打合せ等により密接な連絡をとる。

4. 研究成果

(1) ベクトル束の準同型写像の退化問題に関しては、一般には準同型写像の退化集合による層化は複雑でそのまま扱うのは困難が伴う。この困難は tautological な準同型写像を考えることにより乗り越えることが出来た。この写像による層化は良い性質を持ち、我々の方法が極めて有効で、求める局所化が得られる。さらにこの構成の良い点は、これが普遍的局所化、つまり一般の準同型写像に対する局所化はこれから引き戻して得られることである。これは Thom 類の大幅な一般化で、様々な応用を持つと思われる。これは北海道大学の大本 亨との共同研究として行われた。

(2) 特異多様体上のベクトル場に関しては多くの研究が行われており、その特異点における種々の指数が定められていた。これに関し、研究代表者の留数理論より新たな指数を導入し、それが GSV-指数、さらに仮想指数と一致することを示し、これら既存の指数に対する新しい明示的公式を与えた。これは我々の観点が局所的不変量の研究に有効であることを示すものである。

(3) イタリア、ローマ大学の F. Bracci 達との共同研究で、カレントに対して局所化された交叉理論を構築した。この応用として、Lefschetz 一致点公式を次元が異なる多様体間の二つの写像の場合に拡張した。ここでは Alexander 双対性を Cech-de Rham コホモロジーで表し、一致点集合が特異点を持たない場合の結果を得た。これには我々が導入した局所的および大域的な一致ホモロジー類が重要な役割を果たす。大域的なものはいろいろな研究者により考えられていたが、局所的なものは本研究が最初である。

フランス、リュミニニ数学研究所の J.-P. Brasselet との共同研究で Alexander 双対性の組合せトポロジーによる表現を用いてこれを精密化し、一致点集合が特異点を持つ場合にも、局所的な一致ホモロジー類の明示的公式を与えた。これは S. Lefschetz が 1920 年代に目指していたことと思われる。

(4) ブラジル、ミナスジェライス大学の M. Correa との共同研究で相対 Bott-Chern コホモロジーの理論を展開し完成させた。特に Bott-Chern, Aeppli コホモロジー等を統一的に扱い、長完全列を得た。これは多くの興味深い応用を持つが、その一つとして特異 Hermitian 葉層構造の留数理論を展開し、基本的な例を与えた。またこのコホモ

ロジーにおける切断による局所化, Thom 類, Riemann-Roch の定理への応用を開始した.

この研究結果は当初予期されなかったものであり, 非 Kahler 多様体の研究に極めて有用であるばかりでなく, 数論的特性類等他の分野の研究にもつながり, 将来の大きな発展が見込まれる.

(5) 関数の概念を大幅に拡張するものとして佐藤超関数がある. これは局所コホモロジーを用いて定義されるが実際に用いるには具体的に表す必要がある. 現在までは主として相対 Čech コホモロジーが用いられていたが, 研究代表者は相対 Dolbeault コホモロジーを用いると著しく簡明なることを見出した. これに適合させるためまず相対 Dolbeault コホモロジーの理論を整備拡充した. 特に相対 Dolbeault コホモロジーが, A. Grothendieck および佐藤幹夫によって導入された局所コホモロジーと標準的に同型になることを証明した. さらに局所双対性に関し詳細な考察を行った.

超関数理論への応用は北海道大学の本多尚文, 北海道科学大学の伊澤 毅との共同研究として行っている. まず各種演算を具体的に表した. 実関数の超関数への埋込では相対 de Rham コホモロジーにおける Thom 類が基本的役割を果たす. またファイバー積分を含む積分論が極めて簡明なるのも本理論の特徴である. さらにこの理論で基本的な A. Martineau の定理は上記局所双対性の特別な場合として自然に理解することができる.

以上のことは当初予期していなかった全く新しい知見であり, 今後の大きな発展が期待される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

1 C. Bisi, F. Bracci, T. Izawa and T. Suwa, Localized intersection of currents and the Lefschetz coincidence point theorem, Ann. Mat. Pura ed Appl., 査読有, 195 (2016) 601-621
DOI: 10.1007/s10231-015-0480-4

2 F. Bracci and T. Suwa, Perturbation of Baum-Bott residues, Asian J. of Math., 査読有, 19 (2015) 871-886
<http://dx.doi.org/10.4310/AJM.2015.v19.n5.a4>

3 T. Suwa, GSV-indices as residues, J. of Singularities, 査読有, 9 (2014) 206-218
DOI: 10.5427/jsing.2014.9p

4 M. Abate, F. Bracci, T. Suwa and F.

Tovena, Localization of Atiyah classes, Rev. Mat. Iberoam., 査読有, 29 (2013) 547-578

DOI: 10.4171/rmi/730

[学会発表](計 11 件)

1 諏訪 立雄, Local and global coincidence homology classes, トポロジー火曜セミナー, 2017 年 5 月 9 日, 東京大学(東京都・目黒区)

2 諏訪 立雄, Relative Dolbeault cohomology and its applications, 第 12 回鹿児島代数・解析・幾何学セミナー, 2017 年 2 月 15 日, 鹿児島大学(鹿児島県・鹿児島市)

3 T. Suwa, Thom class and the Riemann-Roch theorem, Seminario Geometria, 2016 年 9 月 21 日, フェッラーラ(イタリア)

4 T. Suwa, Relative Bott-Chern cohomology, Residues and Dynamics, 2016 年 9 月 13 日, ピサ(イタリア)

5 諏訪 立雄, 特性類の局所化としての Grothendieck 留数, Encounter with Mathematics 第 64 回 複素解析と特異点, 2016 年 2 月 20 日, 中央大学(東京都・文京区)

6 諏訪 立雄, Thom class in complex analytic geometry, 多変数関数論冬セミナー, 2015 年 12 月 26 日, 京都大学(京都府・京都市)

7 諏訪 立雄, Local and global Lefschetz coincidence homology classes, 秋田幾何セミナー, 2015 年 11 月 14 日, カレッジブラザ(秋田県・秋田市)

8 諏訪 立雄, Degeneracy loci problem via localization, 第 8 回鹿児島代数・解析・幾何学セミナー, 2013 年 2 月 19 日, 鹿児島大学(鹿児島県・鹿児島市)

9 T. Suwa, Degeneracy loci problem via localization, Seminario di Analisi Complessa, 2012 年 10 月 9 日, ローマ(イタリア)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

諏訪 立雄 (SUWA, Tatsuo)

北海道大学・・・名誉教授

研究者番号: 40109418

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

足助 太郎 (ASUKE, Taro)
東京大学・数理科学研究科・准教授
研究者番号： 30294515

大本 亨 (OHMOTO, Toru)
北海道大学・理学研究院・教授
研究者番号： 20264400

岡 陸雄 (OKA, Mutsuo)
東京理科大学・理学部・嘱託教授
研究者番号： 40011697

竹内 潔 (TAKEUCHI, Kiyoshi)
筑波大学・数理物質科学研究科・教授
研究者番号： 70281160

田島 慎一 (TAJIMA, Shinichi)
筑波大学・数理物質科学研究科・教授
研究者番号： 70155076

中村 弥生 (NAKAMURA, Yayoi)
近畿大学・理工学部・講師
研究者番号： 60388494

與倉 昭治 (YOKURA, Shoji)
鹿児島大学・理学部・教授
研究者番号： 60182680