

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 23 日現在

機関番号：11302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540062

研究課題名(和文)ニュートラル計量と関連する幾何構造について

研究課題名(英文)Geometric structures related to neutral metrics

研究代表者

鎌田 博行(Kamada, Hiroyuki)

宮城教育大学・教育学部・教授

研究者番号：00249799

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：多様体上の中間符号の擬リーマン計量をニュートラル計量と呼び、局所的なニュートラル計量の族を -1 倍の不定性を許して張り合わせて得られる構造をニュートラル構造と呼ぶ。ニュートラル構造と適合する四元数類似構造(パラ超複素構造)を持つコンパクト複素曲面のダビドフ他による例のうち、超楕円曲面の例について局所共形パラ超ケーラーでないニュートラル構造に変形できることが分かった。また、四元数CR多様体(次元は7より大きい)に対する強積分可能性の概念を導入し、超擬凸性と強積分可能性の下、そのツイスター空間上に部分的積分可能な概CR構造(ツイスター概CR構造と呼ぶ)が自然に定まることを示した。

研究成果の概要(英文)：A pseudo-Riemannian metric on a manifold is called a neutral metric if it has neutral signature, and a family of local neutral metrics that conicide, except for multiplication by -1 , on the overlaps, is called a neutral structure. Davidov et al. obtained examples of compact complex surfaces with a quaternion-like structure (parahypercomplex structure) that admit compatible neutral structures, but never admit any compatible neutral metric. Then we show that their example of a hyperelliptic surface can be deformed to a compatible neutral structure, which is not locally conformal parahyperkahler. Also, we introduce the notion of strong integrability for a quaternionic CR manifold (of dimension greater than 7), and show that, under ultra pseudoconvexity and strong integrability, a partially integrable almost CR structure (called the twistor almost CR structure) is defined naturally on its twistor space.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ニュートラル計量 ニュートラル構造 パラ超複素構造 四元数CR構造 強積分可能性 ツイスター空間 ツイスター概CR構造

1. 研究開始当初の背景

幾何学あるいは物理学において正定値とは限らない不定値計量がしばしば現れる。その中でも中間符号の不定値計量(以下、ニュートラル計量(neutral metric)と呼ぶ)については、弦理論に関連した動機づけもあり、近年、研究が活発化しているところである。正定値計量に対して定まる概念や幾何構造の幾つかは、ニュートラル計量に対する対応物も自然に定義される。これまで、正定値計量とニュートラル計量(または不定値計量)で共通する性質や、ニュートラル計量や不定値計量特有の正定値計量では起こらないような現象が見つかっている。特に、複素構造や四元数類似構造(パラ超複素構造)と適合するニュートラル計量をもつコンパクト複素曲面については、正定値とは異なる現象が具体例と共に観察され、本研究の動機付けとなる存在問題や分類を目指した研究が行われていた。また、一般化された複素幾何学やルプランの3次元正定値共形多様体に対するツイスター-CR多様体のレピ形式のように、考える空間の接バンドルそのものではなく、その空間上の直和バンドルや部分バンドルなど、ベクトル束上にニュートラル計量(すなわち、中間符号のファイバー計量)が定まる自然な状況もある。

2. 研究の目的

本研究は、計量および共形構造と、複素構造、四元数類似構造(超複素構造や四元数構造など)との関連と幾何学的性質を、計量が正定値の場合に限らず不定値(特に、ニュートラル計量)の場合まで含めて考察し、計量の符号数によらずに共通する性質や、正定値性と不定値性の差異を指し示す現象について、その原因や背景を調べることが目的としていた。申請当初に設定した具体的な研究テーマは以下のとおりである：

- (A) 超エルミート曲面のニュートラル版の幾何学
- (B) 自己双対ニュートラル計量の幾何学
- (C) 不定値端的ケーラー計量とそのアイソトピック版の幾何学
- (D) 四元数 CR 幾何学

特に、これらのテーマについて、幾つかの予想される研究の進展があれば、真に新しい研究対象が得られることが期待されていた。

3. 研究の方法

研究目的において触れたとおり、ニュートラル計量や後述するニュートラル構造およびそれらの共形構造と、複素構造や四元数類似構造などの関連する他の幾何構造に対する具体的なテーマ(A),(B),(C),(D)を設定して、研究に取り組んだ。これらのテーマは、幾何学全般(微分幾何学、複素幾何学、位相幾何学)、複素解析学、数理物理学に関連があり、これらの分野で得られている結果で本研究に関係するものについて、情報、

資料、文献を入手し、議論やアイデアについて、本研究に利用できるかどうか検討した。また、必要に応じて連携研究者と研究打合せを行い、研究テーマに関係がありそうな研究集会に参加し、講演や参加者との意見交換を通じて、研究推進のためのヒントとなる情報の収集や、研究の方向性の確認を行った。

4. 研究成果

以下では、本研究で得られた成果について、論文や口頭発表によって公表した結果の他に、今後の研究につながる課題なども含めて、研究目的で触れた各テーマ(A)(B)(C)(D)毎に報告する。

(A) について：

コンパクト超エルミート曲面は局所共形的超ケーラーであり、それらが超ケーラー複素トーラス、超ケーラーK3曲面、超エルミート・ホップ曲面のいずれかに共形的であるというボイヤーの定理が知られている。そこで、自然な問いかけとして、そのニュートラル版の考察を、申請当初、問題としてあげていた。しかしながら、ダビドフ・グランチャロフ・ムシカロフ・ヨトフは、2012年の論文において、パラ超ケーラー構造(複素面上の超ケーラー構造のニュートラル版)を変形することにより、局所共形的パラ超ケーラーでないパラ超エルミート構造を複素トーラス上に構成した。さらにコンパクト局所共形パラ超ケーラー曲面の分類定理などが得られている。当初の問題については、正定値の場合と違い、局所共形的パラ超ケーラーでないコンパクトパラ超エルミート曲面の存在が示されたが、このことから、こうした構造を許容するコンパクト複素曲面の分類問題が想起される。特に、K3曲面上には、局所共形的パラ超ケーラー構造は存在しないが、パラ超エルミート構造の存在は不明であり、興味深い今後の課題である。

一方、同論文にあるパラ超エルミート構造の変形に関する別の結果については、議論に不十分な点が見つかった。このようなとき、議論が不十分でも適当に修正すれば結果が正しい場合と、そもそも結果が間違っている場合の両方の可能性がある。まずは議論の修正を試みたがうまくいかなかった。少なくとも論文中の議論が正しくないことは確認できたが、反例についての手がかりもなく、結局、結果の主張そのものの真偽については、現時点でも不明である。

また、ダビドフ他は、ある種の井上曲面や超楕円曲面上のパラ超複素構造で、これに適合するニュートラル計量が存在しない例を与えた。これらは、ニュートラル計量ではなく、局所的なニュートラル計量の族を-1倍の不定性を許して貼り合わせて得られる「ニュートラル構造」(neutral structure)の例を与える。超楕円曲面の例については、ニュートラル計量の変形と同様にして、非自明か

つ具体的なニュートラル構造の変形を持つことが分かった(未発表)。しかし、井上曲面上のニュートラル構造の例については、そのような変形が存在するかどうかは不明である。

(B)と(C)について:

ルブラン・メイソンによるツイスター対応については、中田文憲氏(連携研究者)の積極的な講演等の研究活動により、日本国内でもかなり認知されてきている。こうした機会に積極的に参加し、最近のルブラン・メイソン型のツイスター対応に関する結果などの情報収集を行ったが、研究の本質的な進展は見られなかった。

また、不定値端的ケーラー計量とそのアイソトピック版についても、資料・情報の収集を行ったが、研究の本質的な進展は見られなかった。端的ケーラー計量(あるいは定スカラー曲率ケーラー計量)については、正定値の場合に多くの結果が得られており、それらのニュートラル版の(適当な修正のもとでの)成否については、今後の課題として残されている。

(D)について:

CR構造が複素多様体内の実超曲面が自然に許容する幾何構造である。研究代表者と納谷信氏(連携研究者)は、論文において、CR構造の四元数類似として、四元数多様体の実超曲面をモデルとする幾何構造(以下、四元数CR構造(quaternionic CR structure)と呼ぶ)を提案し、その基本的事項を考察した。例えば、四元数CR構造をもつ多様体(四元数CR多様体)については、強擬凸性のもとで、考えている四元数CR構造に適合する $CSp(n)Sp(1)$ 構造が定まり、より強い超擬凸性(ultra pseudoconvexity)のもとでは、適合する四元数擬エルミート構造(すなわち $Sp(n)Sp(1)$ 構造への簡約)を選ぶ毎に、標準的な接続(CR構造に対する田中・ウェブスター接続の類似物)が存在することが示されている。論文では、この標準接続を用いることにより、ツイスター空間と呼ばれる超擬凸四元数CR多様体上に自然に定まる2次元球面束上に、トートロジカルに定義される概CR構造(以下、ツイスター概CR構造という)のwell-defined性(つまり、四元数擬エルミート構造の選び方に対して依存しないかどうか)や、その積分可能性(つまり、通常の意味のCR構造であるかどうか)について考察した。

ここで、四元数CR構造の積分可能性については、いろいろと変遷があったことに注意する。論文より以前は、四元数CR構造を定める局所構造として、CR構造(積分可能な概CR構造)の3つ組を用いていたが、それでは四元数多様体の実超曲面では一般に成立が期待・確認できないことから、論文では、用いる局所構造が満たす条件を大幅に緩

和し、四元数CR構造に対するレビ形式が、付随する $GL(n,H)Sp(1)$ -構造で不変になるような必要最低限の積分可能性を定義の中で仮定した。それにより、四元数多様体の任意の実超曲面に対して四元数CR構造が定まることとなった。しかしながら、論文の積分可能性では、ツイスター空間上の概CR構造に対するwell-defined性や積分可能性について、議論がなかなか進まない状況が続き、改めてモデルである四元数多様体の実曲面の場合を観察したところ、我々が仮定していた条件よりも強い条件を満たしていることがわかった。そこで論文では、論文で仮定した積分可能性よりも強い条件(論文の中で「強積分可能性」と呼んでいる)を仮定し次の結果を得た:

定理 超擬凸四元数CR多様体が強積分可能であるとき、ツイスター概CR構造は、四元数擬エルミート構造の選び方によらずwell-definedであり、かつ部分的積分可能である(ただし四元数CR多様体の次元は7より大きいとする)。

なお、CR構造の四元数類似は、本報告で扱っている四元数CR構造以外にも種々のものがある(例えば、概接触3-構造、佐々木3-構造、ピカールの意味の四元数接触構造(quaternionic contact structure)、アレフセーフスキー・神島の意味の四元数CR構造など)。論文では、ピカールの意味の四元数接触構造と、四元数CR構造の差異や相互関係についても考察している。例えば、四元数接触構造と四元数CR構造が共通の $GL(n,H)Sp(1)$ 構造を持つための条件を得た。応用として、四元数接触構造と共通の $GL(n,H)Sp(1)$ 構造を持たない四元数CR構造の具体例を与えることができる(例えば、四元数ベクトル空間内の実超曲面として定まる一般の楕円面上の四元数CR構造や、四元数ハイゼンベルグ群の変形として得られる四元数CR構造など)。

また、ピカールの意味の四元数接触構造に対して、横断的3-平面場の選択に応じて四元数CR構造が定まる。特に、標準的な横断的3-平面場として(四元数接触構造に対する)レーブ場で張られるものを選ぶと、対応する四元数CR構造は、論文の意味の強積分可能性を満たすことが示される(論文)。

ツイスター概CR構造の積分可能性については、先の定理のとおり、部分的積分可能であることまではわかっている。ツイスター概CR構造に対するナイエンハウス・テンソルについて、垂直成分、水平成分に分け、さらに水平成分を2つの部分に分けて計算を試みたところ、ナイエンハウス・テンソルの部分的な消滅は示されたが、標準接続の曲率が現れる部分の計算が複雑であり、研究期間内にツイスター概CR構造の真の積分可能性を示すことはできなかった。改めて実超曲面の例

を觀察したところでは、論文 で仮定した強積分可能性よりもさらに強い条件の必要性が示唆されている。(なお、2015年度の実績報告書では、論文 を図書として報告した (doi: 10.1142/9789814719780_0006)。)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

鎌田博行, 納谷信, Almost CR structure on the twistor space of a quaternionic CR manifold, Current Developments in Differential Geometry and its Related Fields, 査読有, 2015, 93-114

鎌田博行, 納谷信, Quaternionic CR geometry, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, Vol.42, No.2, 2013, 159-207

[学会発表](計8件)

鎌田博行, 四元数 CR 多様体に対する概 CR ツイスター空間の積分可能性について, 第23回沼津研究会 ---幾何, 数理解物理, そして量子論---, 2016年3月8日, 沼津工業高等専門学校(静岡県・沼津市)

鎌田博行, 四元数 CR 構造の強積分可能性とツイスター空間について, 福岡大学微分幾何研究会, 2015年11月2日, 福岡大学セミナーハウス(福岡県・福岡市)

鎌田博行, Quaternionic CR structure: a geometric structure modeled on a real hypersurface in a quaternionic manifold, Workshop on almost Hermitian and contact geometry, 2015年10月22日, Bedlewo (Poland)

鎌田博行, 四元数 CR 多様体のツイスター空間について (Twistor space for a quaternionic CR manifold), 第22回沼津研究会 ---幾何, 数理解物理, そして量子論---, 2015年3月10日, 沼津工業高等専門学校(静岡県・沼津市)

鎌田博行, コンパクト複素曲面上の自己双対ニュートラル計量について, 数理解物理合同特別セミナー, 2015年2月21日, 大阪市立大学(大阪府・大阪市)

鎌田博行, Geometric structure modeled on a real hypersurface in a quaternionic manifold, Fourth International Colloquium on Differential Geometry and Its Related Fields (ICDG2014), 2014年9月9日, Veliko Tarnovo (Bulgaria)

鎌田博行, Quaternionic CR structure, Progress of geometric structures on manifolds, 2014名城大学幾何学研究集会, 2014年3月6日, 名城大学(愛知県・名古屋市)

鎌田博行, Compact complex surfaces

with geometric structures related to split quaternions: recent results by Davidov-Grantcharov-Mushkarov-Yotov, 福島幾何学研究会, 2013年12月8日, 福島大学(福島県・福島市)

[図書](計1件)

松下泰雄, 鎌田博行, 中田文憲, サイエンス社, 4次元微分幾何学への招待 不定値計量の存在, ニュートラル計量, 複素曲面, ツイスター, 2014年, 187頁(83-128)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

ホームページ等: なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鎌田 博行 (KAMADA HIROYUKI)
宮城教育大学・教育学部・教授
研究者番号: 00249799

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

相原 義弘 (AIHARA YOSHIHIRO)
福島大学・人間発達文化学類・教授
研究者番号: 60175718

納谷 信 (NAYATANI SHIN)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 70222180

中川 泰宏 (NAKAGAWA YASUHIRO)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号: 90250662

井関 裕靖 (IZEKI HIROYASU)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 90244409

中田 文憲 (NAKATA FUMINORI)
福島大学・人間発達文化学類・准教授
研究者番号: 80467034