様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２２ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００６５

研究課題名（和文）リーマン多様体とポアソン核・熱核のフィッシャー情報幾何学

研究課題名（英文）Fisher information geometry of Riemannian manifolds and Poisson kernel, heat kernel

研究代表者
伊藤　光弘（ITOH, Mitsuhiro）

筑波大学・　・名誉教授

研究者番号：４００１５９１２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：1. Busemann 関数の等位超曲面であるホロ球の微分幾何学の研究を遂行した。実、複素、四元数双曲空間の体積エントロピー剛性定理を与えることができた。また正則断面曲率に関する、複素、ならびに四元数双曲空間の特徴づけに成功した。漸近調和Hadamard多様体のホロ球平均曲率と体積エントロピーとが同じ値をもつという関係式を導出できたことが研究に寄与。
2. Hadamard多様体の理想境界上の確率測度空間に対してBusemann関数重心写像を定義した。他方、確率測度空間上のフィシャー情報幾何学を展開、確立することができた。これを活用して、重心写像の情報幾何学理論をつくりあげることに成功した。

研究成果の概要（英文）：We developed geometry of horospheres, level hypersurfaces of Busemann function and obtained rigidity theorems of real, complex, quaternionic hyperbolic spaces in terms of volume entropy These results are consequence of the identity theorem of volume entropy and horosphere mean curvature for an asymptotically harmonic Hadamard manifold. We obtained information geometry of barycenter map on ideal boundary of an Hadamard manifold by using theory developed by T.Friedrich.

研究分野：Differential Geometry

キーワード：Fisher 計量　Hadamard 多様体　理想境界　Busemann 関数　Poisson 核　漸近調和　双曲空間　体積エントロピー

１．研究開始当初の背景

(1) モデル空間である各種双曲空間のホロ球的特徴づけに関連して，ホロ球の外在幾何学的探求が待たれていた.

(2) また理想境界上の確率測度空間の Fisher 情報幾何学の進展が待望されていた.
T. Friedrich が確立した Fisher 計量を中心とした確率測度空間論をさらに発展させる必要性に迫られていた.

(3) 非等質空間上での Helgason-Fourier 変換論の展開が未解決であった.

(4) その反面 Hadamard 多様体を Poisson 核を介在した Fisher 情報幾何学を展開し，Hadamard 多様体が可視公理を満たす漸近調和空間となることを突き止めていた.
漸近調和性と調和性のギャップをうめるべく研究を開始した.

２．研究の目的

(1) Hadamard 多様体の Poisson 核，熱核から誘導される確率測度空間への写像を Fisher 情報幾何学の枠組みで研究する.

(2) 調和多様体に対する Lichnerowicz 予想（非コンパクト版）を情報幾何学枠組みで研究する.

(3) 非対称的 Damek-Ricci 空間の情報幾何的研究を遂行する.

(4) Fisher 情報計量と各種幾何学的エントロピーとの関連性を Poisson 核，熱核を仲介して研究する.

３．研究の方法

多岐にわたる探求アプローチによって研究する.

(1) ホロ球葉層構造，Ricatti 方程式，Jacobi テンソル論に微分幾何学の枠組みで取り組む.

(2) T. Friedrich によって構築されている確率測度空間の情報幾何学をさらに発展させる
(3) Busemann 重心写像の理論展開に情報幾何学を適用する.

(4) 非コンパクト（漸近）調和多様体において Busemann-Poisson 核による Helgason-Fourier 変換論の構築

４．研究成果

(1) Hadamard 多様体のホロ球微分幾何学の研究を遂行して多くの結果をえた。
モデル Hadamard 多様体である実,複素,四元数双曲空間の，ホロ球主曲率並びに体積エントロピーに関する特徴づけ定理をえた.

定理 A. (X,g) Hadamard 多様体とする．任意のホロ球が全臍的で主曲率が一定ならば，(X,g) は実双曲空間である.

定理 B. (X,g,J) nearly Kaehler Hadamard 多様体とする．各ホロ球の構造ベクトルが主ベクトルで主曲率一定ならば，(X,g,J) は複素空間形である.

定理 C. (X,g,J_1,J_2,J_3) 四元数 Kaehler Hadamard 多様体とする．各ホロ球の３つの構造ベクトルがそれぞれ主ベクトルで主曲率一定ならば，(X,g,J_1,J_2,J_3) は四元数空間形である.

定理 D. (X,g,J) を n 次元近似 Kaehler Hadamard 多様体で Ricci 曲率 ≧-(n+2) と仮定する.測地線 v(t) に沿う構造ベクトル w(t) = J v(t) のホロ球に関する第２基本形式の値が -2 以下ならば，(X,g,J) の体積エントロピーは n 以下である.ここで等号成立は X,g,J) が正則曲率一定 – 4 の複素双曲空間のときかつそのときに限る.

定理 E.(X,g, J_1, J_2, J_3) を n 次元四元数 Kaehler Hadamard 多様体とする.
スカラー曲率 ≧-n(+8) と仮定する．測地線 v(t) に沿う構造ベクトル w_1(t) = J_1v’(t), w_2(t) = J_2 v’(t), w_3(t) = J_3 v’(t) に関するホロ球第二基本形式の値の和が – 6 以下ならば，体積エントロピー値が n+2 以下におさまり，
等号成立ならば，与四元数 Kaehler Hadamard 多様体が， 正則断面曲率 – 4 の四元数双曲空間である.

(2) さらにこの定理を発展させた次の四元数双曲空間剛性定理もえられた.

定理 F. (X,g) を四元数 Kaehler Hadamard 多様体で次元 n = 4m (≧8). (X,g) が漸近調和で スカラー曲率 ≧ -16m(m+2) とする．体積エントロピーの値が 4m + 2 ならば，与四元数 Kaehler Hadamard 多様体が， 正則断面曲率 – 4 の四元数双曲空間である.

(3) Hadamard 多様体の理想境界上の確率測度空間を Fisher 情報幾何学的に発展させることができた．それによって 理想境界上の確率測度に対する Busemann 重心写像を Fisher 情報幾何学的にとらえることに成功した．次の定理は重心の存在一意性定理である.

定理 G. (X,g) を可視公理をみたす Hadamard 多様体とする．すると任意の理想境界上の確率測度は Busemann 重心を X 上にただ一点もつ.

定理 G の仮定のもとに，重心写像 bar が 理想境界上の確率測度空間から X への写像として定義される．写像 bar のファイバー空間構造，重心点が x となる確率測度の集合 bar^{-1}(x) の部分

多様体的性質の解析などが遂行された．その際に，bar^{-1}(x) の測地線的考察が可能となった．定理として

定理 H．bar^{-1}(x) 上の一点 μ とその点での単位接ベクトル τを初期値とする測地線が bar^{-1}(x) 上に載るための必要十分条件は bar^{-1}(x) の第二基本形式 H に関して時刻 t=0 において H(τ, τ) = 0 となることである．

ここで 確率測度空間上の測地線の一般論を大きく展開することができた．後述する．

(4) Hadamard 多様体 (X,g) の等長変換 φ が誘導する理想境界の同相写像 Φ が満たす関係式から次の重心同伴写像なる概念をえた．Φ に対して φ _#(bar(μ)) =φ (bar(μ)) をみたす X の変換 φ をΦ の重心同伴写像という．次の定理がえられた．

定理 I．Poisson 核によって誘導される確率測度μ_x = P(x, θ) dθ に関して，重心同伴写像 φ と Φ が可換の関係にあればφ は Xの等長変換となり，φ の理想境界への拡張がΦ に一致する．

(5) 確率測度空間上の測地線について次の一連の定理がえられた．

定理 J．任意の測地線は簡潔な表現式をもつ．

定理 J よりの帰結として測地的性質について次をえた．

定理 K．任意の二つの確率測度 μ, μ^{\ast} を結ぶ測地線が必ず存在して唯一つである．

定理 L．任意の二つの確率測度 μ, μ^{\ast} に対して，正規化幾何平均確率測度なる確率測度を定義すると，二つの測度を結ぶ測地線が同一の bar^{-1}(x) 上にあるためには，正規化幾何平均確率測度が bar^{-1}(x) 上にあることが必要十分である．

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）

① M. Itoh, H. Satoh, Geometry of Fisher Metric and the Barycenter Map, Entropy, 17(4), 2015, 1814-1849. 査読有

② M. Itoh, H. Satoh, Fisher Information Geometry of The Barycenter Map, AIP Confer. Proc., 1641, 2014, 90-96. 査読有

③ M. Itoh, H. Satoh, Information Geometry of Barycenter Map, Springer Proc. In Math. Stat. , 106, 2014, 79-88. 査読有

④ M. Itoh, H.Satoh, Y.J.Suh, Horospheres and Hyperbolicity of Hadamard Manifolds, Diff. Geom. Appl., 35(Suppl.), 2014, 50-68. 査読有

⑤ M.Itoh, H.Satoh, Horospheres and Hyperbolic Spaces, Kyushu Math. Journal, 66, 2013, 309-326, 査読有

⑥ M.Itoh, Lecture note on Differential Geometry of Horospheres, Proc. of 7th Intern. Workshop of Diff. Geom., 17, 2013, 215-247, 査読無

⑦ 伊藤光弘，佐藤弘康，ホロ球面の幾何による双曲空間の特徴付けについて，数理解析研究所講究録，1817，2012，38－51. 査読無

〔学会発表〕（計 17 件）

① M. Itoh, Osserman Conjecture and Related Topics with Four Dimensional Manifolds, Colloq. Math. Dept., Sungkyunkwan University, 2015 年 3 月 26 日, Sungkyunkwan University, Suwon, 韓国.

② 伊藤光弘，佐藤弘康，測地線の Fisher 情報幾何と重心写像，日本数学会年会，2015 年 3 月 24 日，明治大学駿河台キャンパス（東京都千代田区）.

③ 伊藤光弘，佐藤弘康，調和 Hadamard 多様体と Gauss 超幾何微分方程式，日本数学会年会，2015 年 3 月 24 日，明治大学駿河台キャンパス（東京都千代田区）.

④ 伊藤光弘，情報計量の幾何学とその重心写像への応用，ミニワークショップ統計多様体の幾何学とその周辺，2015 年 3 月 10 日，北海道大学（北海道札幌市）

⑤ M.Itoh, H.Satoh, Fisher Information Geometry of The Barycenter Map, Conference of MaxEnt2014, 2014 年 9 月 21 日，Amboise, France.

⑥ M.Itoh, H.Satoh, Information Geometry of Barycenter Map, Satellite Confer. of ICM2014, Real and Complex Submanifolds, 2014 年 8 月 20 日，NIMS, Daejeon，韓国.

⑦ 伊藤光弘，佐藤弘康，Barycenter and Information geometry，日本数学会，2014 年 3 月 15 日，学習院大学（東京都豊島区）.

⑧ M.Itoh, Pointwise Osserman 4-manifolds and Self-Dual Einstein metrics, Intern. Miniworkshop of Differential Geometry, 2013 年 12 月 19 日, Kyungpook National University, 韓国.

⑨ M.Itoh, Information Geometry of Busemann barycenter, Intern. Miniworkshop of Differential Geometry, 2013 年 12 月 19 日, Kyungpook National

University, 韓国.
⑩ M.Itoh, Rigidity of Quaternionic Hyperbolic Spaces, part I, part II, Mini-workshop of Differential Geometry, 2013年12月18日, Kyungpook National University, 韓国.
⑪ 伊藤光弘, 佐藤弘康, Y.J.Suh, ホロ球の四元数平均曲率と四元数 Kaehler Hadamard 多様体, 日本数学会総合分科会, 2013年9月21日, 愛媛大学（愛媛県松山市）.
⑫ M.Itoh, Fisher Information geometry of the barycenter of probability measures, Conf. of Geometric Science of Information, 2013年8月29日, Paris, France.
⑬ M.Itoh, Self-dual Einstein metrics and Pointwise Osserman 4-manifolds, DGAConferenceBrno2013, 2013年8月19日, Brno, Czech.
⑭ M. Itoh, Geometry of Horospheres and Related Topics, Hot Topics Workshop on Diff. Geometry and Mathematical Physics, 2013年2月19日, NIMS, Daejeon, 韓国.
⑮ 伊藤光弘, Complex Hyperbolic Space and Horospheres, 筑波大微分幾何学火曜セミナー, 2013年1月15日, 筑波大学（茨城県つくば市）.
⑯ 伊藤光弘, 佐藤弘康, Y. J. Suh, Rigidity volume entropy and Kaehler, quaternionic Hadamard manifolds, 日本数学会総合分科会, 2012年9月20日, 九州大学（福岡県福岡市）.
⑰ M.Itoh, Intensive Lectures on Differential Geometry of Horospheres, Research Group in Real and Complex Grassmann Manifolds, 2012年12月5日～12月7日, Kyungpook National University, 韓国

〔図書〕（計　2　件）
① 伊藤　光弘, 倉西数学への誘い, 2014, 岩波書店（分担執筆）146-163.
② 伊藤　光弘, 曲面の幾何学, 遊星社, 2013. 210ページ.

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
伊藤　光弘（ITOH, Mitsuhiro）
筑波大学・　・名誉教授

研究者番号：40015912