様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４００７６

研究課題名（和文）低次元多様体の不変量と幾何構造の連関

研究課題名（英文）Relations between invariants of low-dimensional manifolds and their geometric structures

研究代表者
上　正明（Ue, Masaaki）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：８０１３４４４３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：　研究代表者の上はSeiberg-Witten理論やHeegaard Floerホモロジー理論に由来する3次元多様体の不変量を研究した．特に３次元多様体の中でもザイフェルト有理３次元球面と呼ばれる特別なクラスについて，その組み合わせ的に定義されるmu-bar不変量がある条件付きで解析的に定義されるエータ不変量の組み合わせで表されることをSeibereg-Witten理論を用いて示し，2012から2015にかけて国内外の研究集会で発表し，プレプリントにまとめた．また数年来続けている４次元多様体に関する教科書の執筆を最新の成果をとりいれつつ進めた．１年以内の完成を目指している．

研究成果の概要（英文）：Ue studied invariants of 3-manifolds originated from the Seiberg-Witten and the Heegaard Floer homology theory. In particular in case of Seifert rational homology 3-spheres,which consist of special classes among 3-manifolds, he proved the mu-bar invariant (which is combinatorially defined) is represented by some combinations of analytically defined eta invariants under certain conditions using the Seiberg-Witten theory. He announced the above results at the conferences in Japan and overseas from 2012 to 2015 and completed the preprint (which is prepared to submit). He also continued to write a textbook on 4-manifolds, which started several years ago, including the latest achievements. He is trying to make the textbook in complete form within a year.

研究分野：微分位相幾何学，低次元トポロジー

キーワード：低次元トポロジー　3次元多様体　4次元多様体

１．研究開始当初の背景

境界付き４次元多様体のトポロジーを知るために３次元多様体のホモロジー同境不変量，特にホモロジー同境不変でかつ古典的な Rochlin 不変量の持ち上げでもある不変量を見いだすことは長年の懸案であり，その解明が１つの研究動機であった．研究代表者は以前ザイフェルト有理ホモロジー球面という特別な多様体に対し，福本，古田とともに古典的な mu-bar 不変量と呼ばれる不変量が上述の性質をもつことを Seiberg-Witten 理論をもとに示しており，その後ある種のグラフ多様体と呼ばれるクラスに対して同じ不変量が Heegaard Floer ホモロジー理論由来の不変量と一致することを見いだし，その結果から mu-bar 不変量がそのクラスに対しても上述の性質をみたすことを見いだした．ただしより一般の場合は両者は一致せず上述の問題は未解決のままであった．しかし　2013 年に Manolescu がそのような不変量を始めて発見して事態は新展開を迎え，その後同様の不変量の例がいくつか発見されたが，これらはザイフェルト多様体に限っても互いに一致せず，これらの不変量の性質の解明は依然大きな課題であり続けている．

２．研究の目的

研究代表者の研究目的は４次元多様体のトポロジー，特に与えられた３次元多様体がどんな４次元多様体の境界になり得るかを知るための手段として３次元多様体に関する種々の不変量の特性を研究して４次元多様体の構造の解明に役立てようとすることにある．

３．研究の方法

上記の研究目的を遂行するため，まず特別な３次元多様体のクラスであるザイフェルト有理ホモロジー3 球面に対して mu-bar 不変量とよばれる組み合わせ的不変量と他のゲージ理論等に由来する不変量との関係を調べる方針をとった．研究代表者や福本，古田，Saveliev によりこの不変量は「研究の背景」で述べたホモロジー同境不変性と Rochlin 不変量の持ち上げという性質をもつことが明らかにされていたため，その結果を Seiberg-Witten 理論等を適用してより一般の３次元多様体の場合に拡張する可能性を探った．そのため Seiberg-Witten 理論と Heegaard Floer ホモロジ−理論由来の不変量を結びつける要となるエータ不変量との関係を解明することによりこの問題にアプローチした．

４．研究成果

（1）　研究代表者の上は境界付き４次元多様体のトポロジーの解明を念頭において３次元多様体の種々の不変量の連関を研究した．特にホモロジー同境不変という性質をもつ３次元多様体の不変量を調べることが大きな目標であり，さらにホモロジー同境不変でかつ古典的な Rochlin 不変量の持ち上げでもある不変量の存在は研究出発当時は未知のものであり，それを見いだすことは長年の懸案とされてきた．研究代表者，福本古田, Saveliev によりザイフェルト有理ホモロジー3 球面という特別な３次元多多様体のクラスに対しては mu-bar 不変量という組み合わせ的に定義される不変量が両者の性質をもつことが Seiberg Witten 理論を用いて証明されていたため，この結果をより一般の場合に拡張することが目標であった．一方 3,4 次元多様体に関する別の大きな理論である Heegaard Floer ホモロジー理論に由来する補正項不変量（d 不変量）もホモロジー同境不変という性質をもつ（ただし Rochlin 不変量の持ち上げではない）．そこでこの不変量と mu-bar 不変量およびその背景にある福本古田不変量との関係を解明することを目標とした．研究代表者は以前球面型３次元多様体については両者が一致することを示し，特別なグラフ多様体の場合にも拡張した（それと独立に有理型特異点のリンクの場合に Stipsicz が同様な結果を示した）が，より一般の場合には一致しない．これに関して Rustamov が一般の３次元多様体に対して d 不変量と Seiberg-Witten 不変量の関係を与える公式を与えたが，その中に Atiyah-Patodi-Singer のエータ不変量と呼ばれる量が介在していることに注目し，ザイフェルト有理ホモロジー3 球面に対して mu-bar 不変量がある種の作用素のエータ不変量の組み合わせで表されることをある条件下で示した．その際には古田による Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似の手法が用いられる．この有限次元近似の手法はもともと境界のない４次元多様体において導入されたもので，４次元閉多様体の交叉形式に対する深い結果をもたらしたのみならず，Seiberg-Witten 不変量の精密化である Bauer-Furuta の不変量の構成においても要となるものである．研究代表者はこの手法をザイフェルト多様体を境界にもつ４次元多様体の場合に適用し，球面型３次元多様体について以前得ていた結果等と結合させることにより結果を導いた．その際問題となる４次元多様体上の Seiberg-Witten モジュライ空間のコンパクト性が鍵となる．一般に境界を持つ場合にモジュライ空間のコンパクト性が必ずしも成り立たない点がより結果を一般化する際の障害と

なっている．なお前述の Manolesucu による新たな不変量の背後にも Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似の手法があり，研究代表者のアプローチと何らかの通底するものがあることが期待され，この点についてより追求する価値があると考えている．研究代表者は上記の結果について国内外のの研究集会で講演し，その過程で結果がための条件件をより強化，明確化し，プレプリントの形にまとめた．

M. Ue, The mu-bar invariants , the eta Invariants and Ozsvath Szabo ' s correction terms for Seifert rational homology 3-spheres, preprint, 2015

このプレプリントにおいて Mrowka-Ozsvath-Yu によるザイフェルト多様体の Seiberg-Witten (monopole) モジュライ空間の決定に関する結果を適用するため，2 種の異なる接続に対応するディラック作用素のエータ不変量の比較を行った．そのために, Nicolaescu によるザイフェルト多様体に関する２種の接続に関するエータ不変量の具体的計算を用いた．ただ実際に必要となるのはディラック作用素と符号数作用素のエータ不変量のある種の足し合わせであり，この両者を照らし合わせることで２つの異なる接続に対するこの足し合わせの不変量が一致することが示され，これにより Mrowka-Ozsvath-Yu の結果を Atiyah-Patodi-Singer の指数公式を結びつけることが可能となった．なお上述の不変量の一致についてはザイフェルト多様体における具体計算により示したが，２つの接続をつなぐことによりもっと一般的に示すことが期待される．この点は今後の検討に待たなければならない．
この結果を上記の Rustamov の公式に代入することで，多くのザイフェルト多様体の場合，d 不変量と mu-bar 不変量の差を多様体の組み合わせ的情報によって計算することが少なくとも原理的には可能になる．ただその詳しい組織的解明は今後の研究を待たなければならない．
なおザイフェルト３次元多様体が整係数のホモロジー３球面になる場合には mu-bar 不変量とエータ不変量の関係が Mrowka-Ruberman-Saveliev によって示されている（後述の参考文献）．彼らの結果は別の定理の証明の副産物でその手法は具体的計算による．研究代表者の結果は後述の Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似による幾何的手法によっており，結果は一部の場合を除いて彼らの扱った例とは重複していない．

なおその過程で 2013 年に Manolescu によりホモロジー同境不変かつ Rochlin 不変量の持ち上げとなる不変量が初めて発見され，5 次元以上の位相多様体の単体分割可能性に関する長年の予想が否定的に解決され，さらに Lin による monopole Floer ホモロジーによる別証明が登場するなどの大きな進展があり，研究方針を練り直す必要に迫られた．しかし彼らの不変量と mu-bar 不変量はザイフェルト多様体においても一致せず，相互の関連や詳しい性質を調べることは依然として重要な課題である．またこれまで述べた不変量はいずれも整数ないし有理数値のものであるが，その背景にはより高次の不変量として Seiberg-Witten(monopole) Floer ホモロジーおよび Heegaard Floer ホモロジーがそれぞれ存在している．両者は登場当初から等値であることが予想されていたが, Kutluhan-Lee-Taubes により長大な一連の論文によりそのことを示した．その結果後者に由来する前述の d 不変量は Froyshev が構成した前者に由来する有理数値不変量と結果的に等価になること，特別な多様体の場合に両者の Floer ホモロジーが個別に計算されていた結果が一致することの必然性が明らかにされた．しかし彼らの不変量は Manolescu 達の新たな不変量とは一致しておらず関係は十分明らかでない．また Manolescu の理論の背後にある Floer ホモロジーをより精密化した Seiberg-Witten Floer ホモトピー型の理論の Heegaard Floer ホモロジー側の対応物の存在も十分明らかとなっていない．またこれらの新たな不変量が計算が容易でなく，ザイフェルト多様体に限っても特別な場合しか行われていない．したがって研究代表者がこれまで主な対象としてきたザイフェルト多様体の場合の研究アプローチと Manolescu 等の新たな理論との相互比較や融合を図ることで新たな研究の進展の余地があると考えている．さらにこれらの結果を境界付き４次元多様体のトポロジーの解明に応用することはすでに行われているが，これをより一般化し組織化することが大きな課題である．
研究代表者はザイフェルト多様体を境界に持つ場合にその境界の mu-bar 不変量を用いた交叉形式に関するある種の評価を与えたが，これを Ozsvath-Szabo の d-不変量による評価，Manolescu の不変量による評価（これらは相互に微妙に異なると思われる）を比較することは当面の目標として意義のあることである．

参考文献：
M. Ue: The Fukumoto-Furuta invariants And the Ozsvath-Szabo invariants for Spherical 3-manifolds, Albegraic Topo-Logy -old and new, Banach Center Publ. 85 (2009), 121-139.

C. Manolescu, Pin (2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and The triangulation conjecture, J. Amer. Math. Soc. 29(2016), 147-176

T. Mrowka, D.Ruberman, N. Saveliev, Seiberg-Witten equations, end-periodic Dirac operators, and a lift of Rochlin Invariant, J. Diff. Geom. 88, (2011), 333-377.

D. Ruberman, N. Saveliev, The mu-bar Invariant of Seifert-fibered homology Spheres and the Dirac operator, Geom. Ded. 154 (2011), 93-101

(2) 研究代表者は以前より４次元トポロジーに関する自身の結果も含めた包括的な教科書の執筆をすすめており，本研究期間中に現れた上記のManolescuの結果などの進展も取り入れるなどして内容の拡充を図ってきた．そのため予定より完成が遅れ次年度に持ち越すことになったが，その分古典的結果から最新の結果までを含む初めての教科書とすべく執筆と推敲をすすめている．

(3) 研究分担者の加藤毅は開多様体の間の写像に関し漸近的擬似等角という概念を導入し，多様体から１点を抜いた物どうしが漸近的に擬似等角ならばそれらの多様体上の漸近的に反自己双対な接続のモジュライ空間が同相になることを示した．この結果エンドが３次元球面と半開区間の直積である４次元多様体で同相だが漸近的疑似等角にならないものの例を与えた．またトロピカル幾何におけるオートマトンと力学系の関係の枠組みにおいて前者の幾何的解析的性質が後者の構造にどのように反映するかの一般的枠組みを考察した．

(4) 研究分担者の藤井は幾何学群論の研究を行い，特にdihedral型と呼ばれるArtin群の群表示の増大度をはかるSpherical growth seriesを具体的に有理関数として与え，その増大度がPisot数であることを示した．またArtin群の標準的表示に関するある種の語が最短表示という意味で測地的であるための必要条件を与えた．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　9　件）

(1) Michihiko Fujii, Computation of the spherical growth series of finitely generated groups and monoids by using automata, handbook of group actions, Adv. Lect. Math ,32 Vol. II, 479-521, 2015, 査読有

(2) Michihiko Fujii, Takao Sato, The growth series for pure Artin monoids of dihedral type, Analysis and geometry of discrete groups and hyperbolic spaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B48, Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 111-130, 2014 査読有

(3) Michihiko Fujii, The growth rates for pure Artin groups of dihendral type, European J. Combin., 40, 108-115, 2014, 査読有

(4) Tsuyoshi Kato, Satoshi Tsujimoto, Andrzej Zuk, Automata Groups and box-ball systems, Novel development of nonlinear discrete integrable systems, RIMs Kokyuroko Bessatsu, B47, Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 163-170, 2014, 査読有

(5) Tsuyoshi Kato, Automata in groups and dynamics and induced systems of PDE in tropical geometry, J. Geom. Anal. 24 , No.2, 901-987, 2014, 査読有

(6) Michihiko Fujii, The spherical growth series for pure Artin groups of dihedral type, Publ. Res, Inst. Math. Sci. 49, No.3, 497-530, 2013, 査読有

(7) Michihiko Fujii, Takao Sato, A necessary condition for representatives of elements of Artin groups of dihedral type to be geodesic, Hiroshima Math. J. 43, No. 2, 139-147, 2013, 査読有

(8) Tsuyoshi Kato, Asymptotically quasiconformal four manifolds, J. Math. Soc. Japan 64, No.2 , 423-487, 2012, 査読有

(9) Tsuyoshi Kato, Tomoyuki Amano, Masanobu Taniguchi, Statistical estimation for CAPM with long-memory dependence, Adv. Decis. Sci. Art. ID 571034, 12 pp, 2012 査読有

〔学会発表〕（計　4　件）

(1) Masaaki Ue, ザイフェルトホモロジー３球面のmu-bar不変量, エータ不変量とd不変量について，研究集会「微分トポロジー15」, 2015年3月26日，京都大学理学研究科数学教室（京都府京都市）

(2) Masaaki Ue, The mu-bar invariants and the eta invariants for Seifert homology 3-spheres, 研究集会「多様体のトポロジーの展望」, 2014年11月19日, 東京大学数理科学研究科　（東京都）

(3) Masaaki Ue, The mu-bar invariants and the eta invariants for Seifert rational homology 3-spheres, Workshop

and Conference on the Topology and invariants of Smooth 4-Manifolds, 2013 年 8 月 5 日, University of Minnesota(Minnesota, USA)

(4) Masaaki Ue, The nu-bar invariants, the eta invariants and Ozsvath Szabo's correction terms for Seifert rational homology 3-spheres, 研究集会「４次元トポロジー」、2012 年 11 月 16 日, 広島大学（広島県東広島市）

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
上　正明（Masaaki Ue）
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：80134443

(2)研究分担者
加藤　毅（Tsuyoshi Kato）
京都大学：理学研究科・教授
研究者番号：20273427

藤井道彦（Michihiko Fujii）
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 60254231

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：