

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 30 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540081

研究課題名(和文) 微分空間の研究におけるホモトピー論的手法の展開

研究課題名(英文) Development of homotopy theoretic methods in the study of diffeological spaces

研究代表者

島川 和久 (Shimakawa, Kazuhisa)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：70109081

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：微分空間に対するホモトピー論の確立を目指して、微分空間の圏におけるホモトピー集合およびセル複体の概念を導入し、その基本的な性質を明らかにした。さらに、その結果を基に、弱ホモトピー同値の全体を弱同値のクラスとする有限生成モデル構造を構成し、我々が構成した微分空間の圏のモデル構造が、通常の弱ホモトピー同値写像を弱同値のクラスとする位相空間の圏の標準的モデル構造とQuillen同値であることを示した。

研究成果の概要(英文)：In order to establish the foundation of homotopy theory of diffeological spaces, we constructed on the category of diffeological spaces a finitely generated model structure having smooth weak homotopy equivalences as the class of weak equivalences. It has been shown that our model structure on the category of diffeological spaces is Quillen equivalent to the standard Quillen model structure on the category of topological spaces, with weak homotopy equivalences as the class of weak equivalences.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：微分空間 モデル圏 Quillen 同値 de Rham コホモロジー

### 1. 研究開始当初の背景

微分空間は、反復積分の理論を展開するための枠組みとして Kuo Tsai Chen が導入した differentiable space を起源とし、J.-M. Souriau により現在の形に整備された概念である。位相空間が、開集合の族によってその空間構造を記述するのに対して、微分空間の場合は、パラメトリゼーションすなわち、ユークリッド空間の開領域を定義域とする(滑らかな)写像の族を用いて空間構造を記述するところに大きな違いがある。定義から容易に推測されるように、微分空間は可微分多様体の概念を形式的に一般化したものと見なすことができ、とくに、任意の微分空間に対して de Rham カルキュラスを適用することができる。その一方で、微分空間の圏は可微分多様体より遥に多様な対象を含み、多様体のみを取り扱う場合に比べ、より柔軟な理論構成が可能となる。実際、微分空間の圏においては小極限および小余極限が常に存在し、さらに、射の集合が自然な微分構造をもつことを利用して、それがデカルト閉圏であることが容易に示される。位相空間の圏においてホモトピー論を展開する際の大きな障害は、それが通常の写像空間に関してデカルト閉圏でないという事実であり、その障害を回避するための補助手段としてコンパクト生成空間の圏をはじめとする種々のコンビニエント・カテゴリーを用いる必要があった。島川・吉田・原口は、位相空間の圏と微分空間の圏を関連付ける随伴関手の対を構成し、それを用いて微分空間の圏のデカルト閉圏の構造を移送させることにより、位相空間の一つのコンビニエント・カテゴリー NG と、その微分空間の圏への埋込みを構成した。これにより、位相空間の圏におけるホモトピー論と微分空間の圏におけるそれとの直接比較が可能となった。この事実が、本研究計画を構想するに至った主要な動機である。

### 2. 研究の目的

位相空間の圏の場合と異なり、微分空間の圏はそのままの状態ですべて完備かつ余完備なデカルト閉圏である。さらに、位相空間の圏と同様に、この圏においてもホモトピーの概念が自然に導入され、とくに、標準的な微分構造をもつ球面から微分空間への滑らかな写像のホモトピー類として微分空間のホモトピー群が定義される。本研究の目的は、位相空間の研究に用いられてきたホモトピー論の基本的な概念および手法を微分空間の圏に拡張して微分空間の圏におけるホモトピー論を確立し、その応用を図ることにある。とくにホモトピーの概念に基づく一連の不変量(ホモトピー不変量)とド・ラムカルキュラスを用いて定義される不変量との関係を明かにし、さらに、それら二つの視点を融合した新たな手法を開発して、その有用性を明かにすることが目標である。

### 3. 研究の方法

微分空間の圏においてホモトピー論を確立するために、そのモデル構造を、位相空間の圏の標準モデル構造に準ずる形で導入する。位相空間の圏はデカルト閉圏ではないため、ホモトピー論を円滑に構築するための補助手段としてコンビニエント・カテゴリーを援用するなどの工夫が必要であった。これに対して、微分空間の圏はデカルト閉圏であり、ホモトピー論を展開する上で必要な圏論的性質を初めから備えている点で位相空間の圏に対して優位にある。その一方で、構成の各段階でその滑らかさを保障する必要があるため、より精密な議論が必要とされる。以上の点に留意しながら位相空間の圏のモデル構造に準ずる形で微分空間の圏のモデル構造を構成し、それら二つのモデル構造を、島川・吉田・原口の論文で導入した随伴対を用いて比較する。さらに、微分空間のモデル構造から定まるホモトピー群やコホモロジー群等のホモトピー不変量と、微分形式を用いて構成される de Rham コホモロジー等の微分構造により密接に関連する不変量との関係を明かにする。

### 4. 研究成果

本研究計画によって得られた主要成果は以下の3項目にまとめることができる。

(1) de Rham コホモロジーにおける Mayer-Vietoris 型完全系列の構成: de Rham コホモロジーにおいて Mayer-Vietoris 型完全系列が存在するための条件を1の分割の存在により定式化し、とくに subcartesian 空間に対して、Mayer-Vietoris 系列の完全性が常に成り立つことを示した。この結果は原口の論文 [T. Haraguchi, Long exact sequences for de Rham cohomology of diffeological spaces] にまとめられており、種々のホモトピー不変量との関係を調べる際に重要な役割を果たすものと期待される。

(2) 数値生成位相空間の圏のモデル構造の構成と、その位相空間の圏のモデル構造との Quillen 同値性の証明: 島川・吉田・原口の論文 [K. Shimakawa, K. Yoshida, and T. Haraguchi, Homology and cohomology via enriched bifunctors] において、微分空間の圏と位相空間の圏との間の随伴対  $(T, G)$  から構成される位相空間の圏の部分圏 NG はデカルト閉圏であり、位相空間の圏のコンビニエント・カテゴリーの一つであることが示されていた。原口は論文 [T. Haraguchi, On model structure for coreflective subcategories of a model category] において、より一般的な視点から、位相空間の圏のモデル構造と Quillen 同値であるようなモデル構造を NG に導入することができることを示した。

(3) 微分空間の圏のモデル構造の構成と、その位相空間の圏のモデル構造との Quillen 同値性の証明: 上記の研究を推し進め、微分空

間の圏と位相空間の圏の間の随伴対がモデル圏としての同値を導くようなモデル構造を、微分空間の圏に導入することに成功した。この構成の基本的なアイデアは、位相空間の標準的なモデル構造 (Quillen モデル構造) のそれに極めて近いものであるが、構成の各段階でその滑らかさを保障するために、幾つか工夫が必要になる。最初に問題となる点は、セル複体を定義する際に用いるセルのモデル、およびセル・ファイバー空間の定義であるが、これらに関しては、ユークリッド空間の単位上半球面に然るべき微分構造を導入したものを採用する。また、ホモトピー論を展開する上で必要不可欠な被覆ホモトピー性質を、位相空間の場合と全く同様の形式で証明することが困難であるため、実用性を損なわない範囲で主張を弱めた命題に置き換えることにより、モデル構造の導入に利用することができた。さらに、得られた Quillen 随伴対が実際に Quillen 同値を誘導することを示すために、微分空間の圏におけるセル複体が位相空間の弱ホモトピー型を持つことを示す必要があるが、これに関しては、ホイットニー近似定理の拡張命題を用意することにより、証明が可能になった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

T. Haraguchi and K. Shimakawa, On a model structure on the category of diffeological spaces, arXiv: 1311.5668v3.

T. Haraguchi, Long exact sequences for de Rham cohomology of diffeological spaces, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, vol. 68 (2014), 333-345.

T. Haraguchi, On model structure for coreflective subcategories of a model category, Okayama Journal of Mathematics, 査読有, vol. 57 (2015), 79-84.

A. Kozłowski, M. Guest and K. Yamaguchi, Space of algebraic maps from real projective spaces to toric varieties, J. Math. Soc. Japan, 査読有, (in press).

K. Yamaguchi, Space of equivariant maps to toric variety, 京都大学数理解析研究所考究録, vol. 1922 (2014), 28-33.

[学会発表](計9件)

島川和久, 微分空間のホモトピー論をめぐって, 第39回変換群論シンポジウム, 2012年11月24日, 東京理科大学森戸記念館.

K. Shimakawa, On homotopy theory of

diffeological spaces, International Conference on Topology and Geometry 2013, Sep 6, 2013, Shimane University. 島川和久, Diffeology 入門, Diffeology in Karatsu, 2013年12月20日~22日, 唐津市民交流プラザ.

島川和久, 微分空間のホモトピー論をめぐって, 第39回変換群論シンポジウム, 2012年11月24日, 東京理科大学森戸記念館.

山口耕平, The space of maps to a real toric variety, 変換群の位相幾何学と代数構造, 2014年5月26日, 京都大学数理解析研究所.

原口忠之, 微分空間のホモトピー論とその周辺について, 第61回トポロジーシンポジウム, 2014年7月27日, 東北大学片平キャンパス.

K. Yamaguchi, Atiyah-Jones type problem for the space of holomorphic maps on a certain toric variety, The 41-th symposium on Transformation Groups, Nov 13 2014, 蒲郡市民会館.

A. Kozłowski and K. Yamaguchi, The homotopy type of rational curves on a toric variety, ホモトピー論における有限と無限, 2015年2月20日, 九州大学西新プラザ.

島川和久, 微分空間のモデル構造の構成に関するいくつかの注意, ホモトピー論における有限と無限, 2015年2月20日, 九州大学西新プラザ.

[図書](計0件)

[産業財産権]  
出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等  
<http://www.math.okayama-u.ac.jp/~kazu/>

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

島川 和久 ( SHIMAKAWA KAZUHISA )

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：70109081

### (2)研究分担者

山口 耕平 ( YAMAGUCHI KOHHEI )

電気通信大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：00175655

### (3)連携研究者

原口 忠之 ( HARAGUCHI TADAYUKI )

大分工業高等専門学校・一般科理系・講師

研究者番号：60633708