様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：３３９１９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１０１

研究課題名（和文）スピノール群の作用する空間の幾何学

研究課題名（英文）Geometries of spaces on which Spinor groups act.

研究代表者
橋本　英哉（Hashimoto, Hideya）

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：６０２１８４１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,200,000円

研究成果の概要（和文）：例外型単純 Lie 群 G2 ⊂ SO(7) 及び Spin(7) ⊂ SO(8) の作用する空間の幾何学(特にその部分多様体のグラスマン幾何学)を研究する際に SO(7), SO(8) の作用と G2, Spin(7) の作用の 本質的な違いがどこに現れるかについて研究を行った。ケーリー代数に関連した実 Stiefel manifolds を G2, Spin(7) の作用によって軌道分解し、そのファイバー・バンドルの構造を決定した。この分解によって本質的な違いが 実 Stiefel manifolds のファイバー・バンドル構造から理解できる事を示す事ができた。

研究成果の概要（英文）：We investigate the real Stiefel manifolds Vk(Rn) = SO(n)/SO(n－ k) for n=7 or n=8. If we identify R7 and R8 with purely imaginary octonions and octonions, respectively, then some real Stiefel manifolds can be represented as V2(R7) = G2/SU(2), V2(R8) = Spin(7)/SU(3), and V3(R8) = Spin(7)/SU(2). Therefore each real Stiefel manifold of this type can be represented as an orbit of the action of the Lie group G2 or Spin(7). In our study, we give the orbit decompositions of the other Stiefel manifolds related to the octonions under the action of Lie group G2 and Spin(7). Then we obtain new fibre bundle structures of some real Stiefel manifolds. From these facts, we obtain the difference between the SO(n)-geometries and G2, Spin(7)-geometries.

研究分野： 微分幾何学

キーワード： ケーリー代数　例外型単純リー群G２　スピノール群　グラスマン幾何学　Stiefel多様体　fibre bundle structure　Maurer Cartan form　Moduli 空間

1. 研究開始当初の背景

(1). Cayley 代数 (8 元数) を O とする。O は標準的内積を持つ線形空間として 8 次元ユークリッド空間と同一視する。積構造を導入することにより、非可換、非結合的、交代的な可除代数となる。さらに、Harvey-Lawson の用いた意味での normed algebra の性質を持つ。

この積構造の違いがユークリッド幾何学と例外型単純 Lie 群 G_2, $Spin(7)$ の作用する空間との本質的な違いである。

Cayley 代数 O の積を保つ自己同型群として例外型単純 Lie 群 G_2 を定める。 G_2 の対称性は 3 次元ユークリッド空間の外積を一般化したものではあるがその独自の対称性を持つ。これより定まる概複素構造、付随する標準的な 2 次微分形式、$(3,0)$-形式という幾何学的対象を具体的かつ構成的に作ることができるという利点がある。さらに、通常の Gram-Schmidt の直交化（内積と微分による）とは異なる直交化が可能であり、これより G_2-frame field と $Spin(7)-$frame field を構成することができていた。

(2). ホロノミー群、あるいは、Calibrated geometry の立場から E. Calabi, Harvey-Lawson, Bryant, Joyce らの Twistor 理論、 G_2, $Spin(7)$ ホロノミー群を持つ多様体の構成に関する研究があり、部分多様体論の立場からは、特に 6 次元球面内の部分多様体に関して連携研究者の江尻氏 (名城大学)、間下氏 (法政大学) らの研究があった。これをグラスマン幾何学、変換群論の立場から統一的な見方を提唱し、現在の研究に至っている。概複素構造、付随する標準的な 2 次微分形式、$(3,0)$-形式によって定まる幾何構造に注目し、部分多様体上のこの幾何構造に関する自己同型群の決定とその変形の存在に注目する点に本研究の重要性と価値がある。特に、G_2, $Spin(7)$ の作用する空間 $R^7 \simeq \mathrm{Im}O$, $R^8 \simeq O$ 内の部分多様体上に定義される幾何構造を中心に考える。Cayley 代数 O 内の "任意" の可符号 6 次元部分多様体上には概複素構造 J が存在する。さらに低次元の不変部分多様体上には接触構造、CR-構造、2 次元の場合には複素構造等が自然な形で定義されていた。

2. 研究の目的

本研究では Cayley 代数 O 内の可符号 6 次元部分多様体上の概複素構造全体の為す $Spin(7)$ 合同類に関する moduli 空間の構造を理解することが第一の研究目標である。即ち可符号 6 次元部分多様体上の $U(3)$ 主束の同型類の分類に対応する。そのために、ケーリー代数 O 内のリーマン等質な 6 次元部分多様体上の概複素構造について次の考察を行う。ここで、リーマン等質な 6 次元部分多様体とは $SO(8) \ltimes R^8$ の部分群が推移的に作用する部分多様体を意味する。

(1). 例外型単純 Lie 群 $G_2, Spin(7)$ の構造方程式のより幾何学的かつ基本的な導出方法を与える。例外型単純 Lie 群 G_2 の構成はすでに得られている。$Spin(7)$ の構成が本研究のテーマの一つであり、8 以上の自然数 n に対して $Spin(n)$ の代数的構成と多様体への frame bundle としての構成についても一般化する。

(2). 7,8 次元ユークリッド空間内の 6 次元部分多様体上の $SO(7), SO(8)$ 合同類と $G_2, Spin(7)$ 合同類の違いを把握しその幾何構造の変形理論構築し自己同型群の決定及び変形問題を考察する。(6 次元部分多様体上の $SU(3), U(3)$ 主束と $SO(6)$ 主束との違いを幾何学的に捉える。)

(3). O 内の不変微分形式に関する不変部分多様体を 6 次元球面へのガウス写像を用いて、6 次元球面内の概複素構造に関する不変部分多様体との関連を調べる。さらにグラスマン多様体へのガウス写像とグラスマン多様体の $Spin(7)$ 軌道分解との関連についても考察する。

O 内のリーマン等質な可符号 6 次元部分多様体に関しての研究を更に cohomogeneity 1、あるいはより一般の可符号 6 次元部分多様体へ拡張することも、次の課題である。

さらに、より一般のユークリッド空間内の部分多様体をスピノール幾何学の立場から例外群の作用を含む形で記述し、不変部分多様体の可積分条件の表現を求めることにより不変部分多様体の構成理論を構築しその moduli 空間を具現化することが目的である。

3. 研究の方法

Cayley 代数内の可符号 6 次元部分多様体の族の概複素構造の変形を理解する事及び $Spin(7)$ 合同類の為す moduli 空間の記述を中心にして下記の計画に従って研究を進めた。

(1). Cayley 代数内のリーマン等質な可符号 6 次元部分多様体上の概複素構造の moduli 空間について考察する。リーマン等質な可符号 6 次元部分多様体は完備性を持つので $(6-k)$ 次元ユークリッド空間 R^{6-k} と $k+1$ 次元球面 S^{k+1} 内の等質な超曲面 M^k とのリーマン積であることが解る。$\varphi : M^k \times R^{6-k} \to \mathrm{Im}O$ を等質超曲面の表す埋め込みとする。$SO(8)$ の任意の元 g を作用させて $g \circ \varphi : M^k \times R^{6-k} \to \mathrm{Im}O$ なる写像を構成する。このとき、可符号 6 次元部分多様体はリーマン多様体として全く変化はないが、$M^k \times R^{6-k}$ 上に誘導される概複素構造は、変化する可能性がある。実際、$SO(8)$ 合同ではあるが $Spin(7)$ 合同ではない変形が存在する。最も典型的な例として、$S^3 \times S^3$ 上に誘導される概複素構造は、$SO(8)$ の 1 パラメーター部分群の作用で異なることが示される。この事実の証明は、$S^3 \times S^3$ 上の $Spin(7)$-frame field を構成し、これを用いて $Spin(7)$ 構造方程式に代入し、第二基本形式と概複素構造を用いて $Spin(7)$ 合同類に関する不変量を計算することによって得られる。変形の存在についてはグラスマン多様体の構造を用いることによってその存在は理解できるが、具体的に記述し、概複素構造の為す moduli 空間を表現するためには上記の $Spin(7)$ 不変量の計算が必要となる。現在分類されているその他のリーマン等質な可符号 6 次元部分多様体について考察するのが本研究課題の第一の問題点である。

(2). 上記の計算を実行する際に問題となるのが Bryant による $G_2, Spin(7)$ 構造方程式である。Bryant の 1982 年の論文の証明では $G_2, Spin(7)$ の構造方程式導出方法は、必ずしも理解しやすい方法ではなかった。その理由は、moving frame method を構成する際に spin 表現を得るための方法が繁雑であり、計算も指数写像を用いているため具体的な $G_2, Spin(7)$ 束の切断として構成方法が不明な点が存在していたためである。この部分を改良することが我々の研究の目的の一つである。moving frame method の基本は 3 次元ユークリッド空間内の曲線論における Frenet-Serret の公式である。この証明と同様な方法を用いて $G_2, Spin(7)$ 構造方程式を導くことが目標である。

(3). ガウス写像と 6 次元球面内の概複素構造に関する不変部分多様体と Cayley 代数内の可符号 6 次元部分多様体との関連についての研究。この部分多様体上の概複素構造は、6 次元球面の概複素構造をガウス写像を用いて引き戻したものと考えることもできる。この意味で、リーマン等質な 6 次元部分多様体のガウス像は 6 次元球面内の不変等質部分多様体と密接に関連している。この関連と等質な超曲面上の $U(3)$ 主束の分解との関連について考察する。特に、6 次元球面内の概正則曲線、3 次元全実部分多様体、3,4 次元 CR 部分多様体等に対応する 6 次元部分多様体のガウス写像からの構成について研究を行う。

(4). 6 次元部分多様体上には構造群が 3 次の特殊ユニタリ群 $SU(3)$ となる主束が構成できる。この主束の同伴束として概複素構造の存在から fibre が複素 2 次元の複素射影空間となる射影束が存在する。6 次元球面の場合には、この射影束が twistor 空間に他ならなかった。この他の等質な概複素構造を持つ 6 次元部分多様体上の $U(3)$ 主束の幾何学的構造を調べるのが問題の一つである。そのために、$U(3)$ 主束上に構造群に適合した接続を導入し、それを用いて $U(3)$ 主束上にあるリーマン計量を定義する事が可能である。この $U(3)$ 主束のリーマン多様体としての構造を調べる。また、$SU(3)$ 主束の同型類としてチェックコホモロジーとの関連を明らかにする。幾何学的には、6 次元球面上の $SU(3)$ 主束は G_2 であるから、超曲面上の $SU(3)$ 主束は、例外型単純 Lie 群 G_2 の変形に対応している。その意味でも興味深く、本研究の重要な研究対象である。さらに、その同伴束として構成できる射影束が射影代数多様体となる必要十分条件も研究する。

4. 研究成果

(1). ケーリー代数内の 7 次元球面内の可符号超曲面上には、はめ込み (写像) を用いることによって計量構造に適合した概複素構造が具体的に構築できる。この超曲面上に誘導された概複素構造に関する自己同型群 (Spin(7) の部分群となる) についての研究を行った。7 次元球面内の主曲率の個数が 3 個以下の等経超曲面上の自己同型群を決定した。主曲率が 2 種の超曲面の場合でも誘導される概複素構造に関する自己同型群は埋め込みの仕方によって 1 変数分の変形が存在する場合と一意性を持つ場合とに分けられる現象を得ることができた。SO(8) のリーマン幾何学では捉えられない Spin(7) の幾何構造が明瞭な形となった。

(2). 純虚ケーリー代数に関連した Stiefel 多様体の G2 軌道分解を得た。この分解は純虚ケーリー代数内の部分多様体の G2 合同類の為すモジュライ空間を記述するために必要な”幾何学的対象が何か”を理解することを目的に研究を行った際に得られた重要な結果である。さらに、この分解は自然にツイスター空間の自然な fibre bundle 構造

$$\mathbf{R}P^7 \to \mathbf{C}P^3 \to \mathbf{H}P^1$$

と結びついていることを発見した。同様の考察を Spin(7) の場合にも行いケーリー代数に関連した Stiefel 多様体の Spin(7) 軌道分解も G2 軌道分解による剰余空間と同じ構造を持つことが解った。この分解を用いる事によって純虚ケーリー代数内の曲線全体の G2 合同類のなすモジュライ空間の記述が得られることが共同研究の中で理解することができた。

(3). ケーリー代数または Clifford 代数は、代数系の中では比較的扱い難く、幾何学的な応用があまり顕著に現れていない代数構造ではあるが、研究を推進する内に、古典群よりも深い内容を持つ代数系である事が理解されつつある。古典群の幾何学は確かに現在の我々の認識の中の取り扱い易い数学的対象ではあるが統一的な扱いと位相幾何学的な立場からの研究方法とを鑑みれば単連結な群の中で理論を構築することが自然であり、表現の持つ煩わしさよりも本質的な理論構築のためには、この隠れた対称性をもつケーリー代数または Clifford 代数の幾何学を発展させる必要がある。

本研究の特色は、まだ、低次元の空間の表現のみを追求している段階に過ぎないが、それでも解決すべき問題は多岐に渡っており現在までに理解できた現象は希有のものと言えるものであり、今後の多くの実験的思考と数学的な研究対象として重要なものである。独創的な点は、E.Cartan の最も得意とした外微分形式の理論構成を Principal fibre bundle の理論と組み合わせることで位相幾何学と微分幾何学の融合した表現を得ることができそのことにより部分多様体の全体の為す moduli 空間を記述することが可能になった点にある。また、ケーリー代数の構造に適合した群、例外型 14 次元単純 Lie 群 G_2 及び、$Spin(7)$ を用いた幾何学を展開することにある。この構造群の簡約によって幾何学の合同類が変わるためケーリー代数内の部分多様体全体の為す moduli 空間は、通常のユークリッド幾何学におけるそれとは大きく異なることが理解されつつある。その大きな差の要因は不明確なものであり、明確に認識されているものではなかった。今回の我々の研究で、その本質的な差異が Stiefel 多様体の $Spin(7), G_2$ による軌道分解に顕著に表れることが理解できた。この軌道分解を用いて曲面、及び 3、4 次元多様体からケーリー代数（8 次元ユークリッド空間）への写像全体の moduli 空間を記述し、$Spin(7), G_2$ の幾何学の持つ特有な数学的描像を描き出すことが今後の主たる課題として残っている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 件)

① Hideya Hashimoto and Misa Ohashi, ”On geometric structures on $S^3 \times S^3$ in the octonions.”, Prospects of differential Recent geometry and its related fields, World Scientific（査読有）145-153 (2014).

② Hideya Hashimoto and Misa Ohashi, ”Realization of subgroups of G_2, Spin(7) and their applications", Recent Progress in Differential geometry and its related fields, World Scientific (査読有) 159-175 (2012).

③ Hideya Hashimoto and Misa Ohashi, "On fibre bundle structures of Stiefel manifolds related to the otonions." (accepted in) Topology and its applications.(査読有) To appear.

④ Hideya Hashimoto and Misa Ohashi, "On the automorphism groups of isoparametric hypersurfaces of S^7. "(accepted in) Advanced studies in pure mathematics.(査読有) To appear.

[学会発表等] (計 10 件)

① 橋本英哉, 大橋美佐 Octonions に関連した Stiefel manifolds の $G_2, Spin(7)$ 軌道分解とその応用. 2015 年 3 月, 日本数学会年会, 明治大学 (東京都).

② Hashimoto, Hideya and Ohashi Misa, On some constructions of G_2 and $Spin(7)$ bundles on a 3-manifold by using Clifford algebra of order 3. International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2014) 2014 年 11 月, トルコ

③ 橋本英哉, On Clifford algebra and its application. 佐賀大学理工学部数学科談話会, 2014 年 5 月 佐賀市.

④ 橋本英哉, On automorphism groups of 6-submanifolds in the octonions. 若狭三方幾何学研究集会 2013, 2014 年 3 月, 若狭 (福井県)

⑤ Hashimoto, Hideya and Ohashi Misa, On group of automorphisms of the induced orthogonal almost complex structures of 6-dimensional submanifolds in the octonions. International Conference on Topology and Geometry 2013 島根大学 2013 年 10 月 (島根市)

⑥ Hashimoto, Hideya, On group of automorphisms of 6-submanifolds in the octonions and its applications. International Workshop on Special Geometry and Minimal Submanifolds
東北大学 2013 年 8 月 (仙台市)

⑦ 橋本英哉, 幾何構造と Calabi-Bryant の構造方程式. 福島幾何学研究集会, 福島大学, 2013 年 5 月 (福島市)

⑧ 橋本英哉, 大橋美佐, Grassmann 多様体と Stiefel 多様体の $G_2.Spin(7)$ 軌道分解, 淡路島幾何学研究集会 2012, 2013 年 3 月 (淡路島)

⑨ Hashimoto, Hideya and Ohashi Misa, "On decomposition of Stiefel manifolds by G_2 and $Spin(7)$," 3rd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields. 2012 年 8 月 (ブルガリア)

⑩ 橋本英哉, "G_2 と $Spin(7)$, のある類似性について, 大阪市立大学 OCU48 セミナー,2012 年 5 月 (大阪市)

6. 研究組織

(1). 研究代表者
橋本　英哉 (Hashimoto Hideya)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：60218419

(2). 連携研究者
江尻　典雄 (Ejiri Norio)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号：80145656

間下　克哉 (Mashimo Katsuya)
法政大学・理工学部・教授
研究者番号：50157187

(3). 研究協力者
大橋　美佐 (Ohashi Misa)