

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 15 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540106

研究課題名(和文) 確率幾何学的な解析に基づくスピン系臨界現象の研究

研究課題名(英文) Analysis of critical behavior for spin systems using stochastic-geometrical representations

研究代表者

坂井 哲 (Sakai, Akira)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：50506996

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：相転移や臨界現象を示すスピン系数理論モデルの代表格に、(強磁性)イジング模型や4モデルがある。2007年、坂井は「ランダムカレント表示」という確率幾何学的な表現を用い、イジング模型に対するレース展開を開発した。この確率幾何学的な表現をさらに発展させ、4モデルに対してレース展開が適用できることを証明、高次元における臨界2点関数の漸近評価を導出した。また、スピン間の直接相互作用係数がスピン間距離の冪で減衰する場合についての解析手法を確立、その冪指数の値に依存して、高次元における臨界2点関数が漸近的にNewton核のように振る舞ったり、或いはRiesz核のように振る舞うことを証明した。

研究成果の概要(英文)：The (ferromagnetic) Ising model and the 4 model are known to exhibit phase transition and critical behavior. In 2007, Sakai used a stochastic-geometrical representation, known as the random-current representation, to develop the lace expansion for the Ising model. Extending the use of this stochastic-geometrical representation, we applied the lace expansion to the 4 model and obtained an asymptotic expression of the critical two-point function in high dimensions. We also established the method of analyzing critical behavior for the models defined by power-law decaying pair potentials, and proved that the critical two-point function in high dimensions is asymptotically Newtonian or Riesz, depending on the value of the power exponent of the pair potentials.

研究分野：確率論, 統計力学, 数理物理

キーワード：スピン系臨界現象 4乗モデル イジング模型 レース展開 イジング1-arm指数

1. 研究開始当初の背景

温度を変えると磁石(スピン系)が磁性を失ったり、水が沸騰して蒸発するといった現象には馴染み深い。このように温度などの巨視的なパラメータが変化したとき、系が質的に全く異なる状態に遷移する現象を相転移といい、そのギリギリのパラメータ値を臨界点という。特に系の「物差し」である相関距離の発散を伴う臨界点付近では、様々な観測量が冪的な特異性を示し、マクロとミクロの区別がつかない(スケールフリー、フラクタル的)。このような現象を臨界現象といい、その冪指数たちを臨界指数という。実は、様々な物理系は臨界指数の値をもとに分類できると信じられている(臨界指数の普遍性)。例えば、磁石は構成原子の種類や配合などによって異なる臨界点を取りうるが、臨界指数の値は共通だと考えられている。さらに驚くことに、磁石と水は全く異なる物理系であるにも拘らず、それらは同じ普遍性クラスに属することを示唆する実験事実がある。こうした臨界指数の普遍性を数理モデルを用いて理論的に完全に理解することは、確率論、統計力学、数理物理の重要課題の一つである。臨界現象に関連した研究に対して、2006年に Werner が、2010年に Smirnov がフィールズ賞を受賞したことも記憶に新しい。

イジング模型と φ^4 モデルは、そうした臨界現象を示すスピン系数理モデルの代表格である。特にイジング模型は汎用性が高く、今日一つのパラダイムを形成している。各スピンの従う確率分布は二つのモデルでそれぞれ異なる(例えるなら「構成原子の種類が違う」ということ)が、共に同じ普遍性クラスに属するものと思われていて、数学・物理両分野で長い間精力的に研究されてきた。例えば、2次元正方格子 \mathbb{Z}^2 上の最近接イジング模型の厳密解が Onsager によって発見されたのは1944年、その厳密解から分かる臨界現象に確率幾何学的新しい解釈を与えることに Smirnov が成功したのは最近のことである。他方、 d 次元正方格子 \mathbb{Z}^d 上の最近接モデルが「鏡映正值性」と呼ばれる非常に強い対称性を持つことを利用して、 $d > 4$ の臨界現象が単純ランダムウォークによって評価できてしまうこと(このような単純な臨界現象を一般に平均場臨界現象という)が1970年代後半には知られていた。しかし、実際のスピン系は非局所的な交換相互作用も含んでいて、鏡映正值性が成り立つと仮定することは非現実的であったために、この仮定を除外することが長く待ち望まれていた。2007年、坂井はランダムカレント表示と呼ばれる確率幾何学的な表現を用いてイジング模型のレース展開を導出し、鏡映正值性を仮定せずに、高次元イジング模型の平均場臨界現象を証明することに成功した。レース展開の手法は非常に強力だが、実際に適用できる例は今のところ限られている。イジング模型以外では、線形高分子の統計力学モデルである「自

己回避歩行」、ランダム媒質を記述する「パーコレーション」、伝染病伝搬をモデル化した「コンタクトプロセス」などがある。しかも、これらのモデルに対しては、レース展開が高次元臨界現象を厳密に解析できる殆ど唯一の手段である、というのが研究開始当初の状況であった。

2. 研究の目的

以上の背景を踏まえ、スピン系の臨界現象をより深く理解すべく、以下3課題の解決を図った。

課題(1): 冪的な交換相互作用で定義されたイジング模型の臨界2点関数の漸近挙動について、最近接モデルのような短距離相互作用ではなく、スピン間の距離 r に関して r^{-a} (ただし $a > 0$; 特に $a = 2$ では2次のモーメントが発散)のようにゆっくり減衰する交換相互作用の場合、臨界点直上における2点関数 $G(o, x)$ (=原点 o と $x \in \mathbb{Z}^d$ に居るスピンの積の期待値)がどのような漸近的振る舞いを示すのか明らかにする。 $a = 2$ の場合、レース展開によって既に多くの傍証が集められ、 $d > 2(a/2)$ のとき $G(o, x) \sim |x|^{-a/2-d}$ のように減衰することが示されつつある。 $a = 2$ の場合是对数補正が掛かるものと予想されるが、その予想が正しいのか、正しければどのような補正が必要なのかも同時に明らかにする。

課題(2): φ^4 モデルに対するレース展開について、 K_N を頂点数 N の完全グラフとする。実は、交換相互作用を N の或る適当な冪でスケールした $\mathbb{Z}^d \times K_N$ 上のイジング模型は、 N が十分大きいとき \mathbb{Z}^d 上の φ^4 モデルを近似できることが知られている(Simon-Griffithsの構成法)。したがって、イジング模型に対して成功したレース展開の手法が、 φ^4 モデルに対しても成功する可能性が高い。我々は $\mathbb{Z}^d \times K_N$ 上のイジング模型に対するレース展開を導出し、その展開係数の N 依存性を詳しく調べ、最終的に(鏡映正值性を仮定せずに)高次元 φ^4 モデルの平均場臨界現象を証明する。

課題(3): イジング模型の1-arm指数について、原点を中心とする半径 r の d 次元球 (\mathbb{Z}^d)内で臨界イジング模型を考え、原点に位置するスピンの期待値 $M(r)$ の漸近的振る舞いを調べる。ただし、 B_r の外側は+スピンドで埋め尽くされているものとする(+境界条件)。このとき1-arm指数と呼ばれる臨界指数が存在し、 $M(r) \sim r^{-\nu}$ のように振る舞うものと期待されている。我々は $M(r)$ のランダムカレント表示を導出し、課題(1)の結果やパーコレーションに対するKozma-Nachmiasの帰納法を応用して、高次元では $\nu = 1$ に退化することを証明する。

3. 研究の方法

課題(1) 長距離相互作用モデルに対するレース展開について共同研究を続けている台湾の Lung-Chi Chen 教授と相互訪問をし、研究打ち合わせを行なった。その結

果を纏めて論文を執筆．草稿は E メールでやり取りした．

課題(2) まず φ^4 モデルをイジング模型で近似した先行研究を調査し，それを基に細かい評価を積み上げ，論文を執筆．途中，ランダムカレント表示の専門家 (Aizenman 教授) やレース展開の専門家 (Brydges 教授, Slade 教授) と個人的に意見を交換した．

課題(3) ランダムカレント表示に関して共同研究を続けているオランダの Heydenreich 教授と相互訪問をし，研究打ち合わせを行なった．また，Oberwolfach (ドイツ) で行なわれた研究集会の期間中も研究打ち合わせを行なった．草稿やノートは E メールや Dropbox でやり取りした．

4. 研究成果

課題(1) イジング模型の臨界 2 点関数だけでなく，自己回避歩行やパーコレーションの臨界 2 点関数も統一的に調べ，それらの漸近挙動がモデルの詳細やパラメータ a にどのように依存するのか明らかにした．具体的には， $a > 2$ のときは $d > 2\ell$ (自己回避歩行とイジング模型のときは $\ell = 2$ ，パーコレーションのときは $\ell = 3$) で臨界 2 点関数は漸近的に Newton 核のように振る舞い， $a < 2$ のときは $d > a\ell$ で Riesz 核のように振る舞うことを証明した．ここに現れた次元の下限 ($= (a^2)\ell$) は上部臨界次元と呼ばれ， a の値によって変わることが我々の先行研究で知られていたものである．さらに，漸近的な振る舞いに現れる比例定数の表現が $a = 2$ を境に変わること (クロスオーバー) も証明した．これらの結果は，後述の雑誌論文 に収められている．また，後述の研究集会，～でも発表を行なった．境界領域 $a = 2$ については，現在も共同研究者と意見交換を継続中である．

課題(2) φ^4 モデルをイジング模型で近似する Griffiths-Simon 構成法を用い，イジング模型の 2 点関数に対して得られていたレース展開と組み合わせ， φ^4 モデルの 2 点関数がみだす非線形方程式である Schwinger-Dyson 方程式を高次元で線形化できることを証明．その結果，臨界 2 点関数の漸近挙動を「繰り込み群」に頼らず導出することに成功した．この結果は，後述の雑誌論文 に収められている．また，途中段階や完成版のアナウンスは，後述の研究集会，～，～で行なった．

課題(3) 期待値 $M(r)$ に関する相関不等式を幾つか導出し，高次元で成立することが知られている臨界 2 点関数の評価を用いて臨界指数 ν が平均場の値 1 に退化することを証明しようとしたが，現在までのところ成功してはいない．その主要な原因は，イジング模型が境界条件に強く依存することにより，パーコレーションについて知られている Kozma-Nachmias の方法が上手

く機能しないことにある．現在も共同研究者間で情報を共有し，意見交換をしている．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Akira Sakai, Lung-Chi Chen, Critical two-point functions for long-range statistical-mechanical models in high dimensions, *The Annals of Probability*, 査読有, Vol.43, 2015, 639-681, DOI:10.1214/13-AOP843

Akira Sakai, Application of the lace expansion to the φ^4 model, *Communications in Mathematical Physics*, 査読有, Vol.336, 2015, 619-648, DOI:10.1007/s00220-014-2256-x

[学会発表](計 13 件)

Akira Sakai, Application of the lace expansion to the φ^4 model, The Modena Workshop “Disorder in Probability and Statistical Mechanics”, 2012 年 6 月 25 日～29 日, Università di Modena e Reggio Emilia (イタリア)

Akira Sakai, Application of the lace expansion to the φ^4 model, The MFO Workshop “Scaling Limits in Models of Statistical Mechanics”, 2012 年 9 月 9 日～15 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (ドイツ)

坂井 哲, Application of the lace expansion to the φ^4 model, 確率論シンポジウム, 2012 年 12 月 18 日～21 日, 京都大学 (京都市)

Akira Sakai, Application of the lace expansion to the φ^4 model, 2013 NCTS Workshop on Stochastic Processes and Related Topics, 2013 年 3 月 14 日～15 日, National Tsing Hua University (台湾)

Akira Sakai, Recent progress in the lace expansion, The ISI Workshop “New Directions in Probability”, 2013 年 5 月 30 日～6 月 4 日, Indian Statistical Institute Bangalore (インド)

坂井 哲, レース展開入門 厳密な臨界現象の解析を目指して, 第 23 回日本数理生物学会大会, 2013 年 9 月 11 日～13 日, 静岡大学 (浜松市)

坂井 哲, An attempt to prove mean-field behavior for percolation in 7 dimensions, 新潟確率論ワークショップ, 2013 年 12 月 5 日～6 日, 新潟大学 (新潟市)

Akira Sakai, An attempt to prove mean-field behavior for percolation in 7 dimensions, NZ Probability Workshop,

2014年1月6日～10日, Distinction Te Anau Hotel (ニュージーランド)
坂井 哲, Critical two-point function for the lattice ϕ^4 model in dimensions $d > 4$, 札幌数理物理研究集会, 2014年9月1日～2日, 北海道大学(札幌市)
Akira Sakai, Critical two-point function for the lattice ϕ^4 model in dimensions $d > 4$, UBC Probability Seminar, 2014年9月10日, University of British Columbia (カナダ)
Akira Sakai, General idea and recent results on the lace expansion, The International Mathematical Meeting and the Annual Meeting of the Taiwanese Mathematical Society, 2014年12月6日～7日, National Cheng Kung University (台湾)
坂井 哲, Critical correlation in high dimensions for long-range models with power-law couplings, 新潟確率論ワークショップ, 2015年1月22日～23日, 新潟大学(新潟市)
Akira Sakai, Critical correlation in high dimensions for long-range models with power-law couplings, The IHP Workshop "Spin Glasses, Random Graphs and Percolation", 2015年2月16日～20日, The Institut Henri Poincaré (フランス)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~sakai/>
<http://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dsp>

ace/index.jsp
国際研究集会 "The 2nd Workshop on Universality and Scaling Limits in Probability and Statistical Mechanics" 主催, 2013年8月5日～9日, 北海道大学(札幌市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坂井 哲 (SAKAI, Akira)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：50506996

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：