

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 18 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540113

研究課題名(和文)再生核の理論のチコノフ正則化法への応用

研究課題名(英文)Applications of reproducing kernels to the Tikhonov regularization

研究代表者

齋藤 三郎(Saitoh, Saburou)

群馬大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：10110397

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：再生核の理論とチコノフ正則化法の融合で微分方程式や積分方程式の数値解析的な解法として、アヴェイロ離散化法として相当数の論文を出版した。特に一般化分数関数の表現や特殊な場合として、ゼロ除算の全く新規な成果が得られた。非線形方程式に結びつく、難しいコンボリューション積分方程式の解法に成功した。特に予期しない結果として、線形偏微分方程式の初期値問題の解法について、再生核の理論、再生核空間、積分変換、固有値関数、特殊関数を用いる一般論を確立して、いろいろ具体的な成果を得た。大きな研究目標の著書出版計画は約420ページの完成版を作成して、出版社と出版の交渉を行い中で、残念ながら、出版を確定させていない。

研究成果の概要(英文)：We were able to establish the Aveiro discretization method that gives many numerical solutions of partial differential and integral equations by applying the theories of reproducing kernels and of Tikhonov regularization, and we published papers as applications. In particular, we got a general concept of representation of fractional functions and we found the division by zero as the typical case. We also succeeded in the numerical solutions for some convolution integral equations which involve non-linear equations. Incidentally, we found a general theory among initial value problems in partial differential equations, reproducing kernels, eigenfunctions, integral transforms, and special function theory. For the publication plan of a general theory of reproducing kernels, we complete a book manuscript with about 420 pages and we are discussing its publication with some publishers over about 2 years, however, at this moment we were not able to determine its publication, unfortunately.

研究分野：応用数学

キーワード：再生核 積分変換 数値解法 初値問題 チコノフ正則化法 偏微分方程式 積分方程式 ゼロ除算

1. 研究開始当初の背景

齋藤は、スタンフォード大学流の具体的な再生核の理論を始めとして一般論や応用に関する再生核の理論の広い分野を研究テーマとし、ここ45年来、一貫して研究を行ってきた。その関連論文は150編を越え、英文研究著書も2冊出版している。約15年前、熱伝導における逆問題への数値解析的なアプローチとして、チホノフの正則化法に再生核の理論を適用する考えを得た。

そのようなとき、機械工学の松浦氏が共同研究に加わり、具体的な公式の数値計算に成功し、更に計算機画面上に結果を表現することにも成功し、これらの歴史的な成功に刺激されて、いろいろな逆問題からの理論の精密化を図るとともに、現実的な計算アルゴリズムの構築を目指して共同研究することとなった。その後、逆問題における難問として有名な実逆ラプラス変換の数値解析的な解法も藤原宏志氏と澤野嘉宏氏の協力を得て成功し、そのソフトの原理の数学的な理論を概ね完成させた。そこで解析学の相当な問題を再生核とチホノフ正則化法を用いて計算機の画面に解を構成する目標を以て広く研究を行っている。

2. 研究の目的

再生核の理論の広範な応用、特に数値解析の観点から、計算機画面上に解を実現させるような研究を行なう。特に従来、方程式の非適切性により解くことが困難とされてきた、医学や工学における複雑な境界値問題を具体的に現実的な時間内で計算できるアルゴリズムを開発し、逆問題解法のブレイクスルーを目指す。澤野嘉宏氏と進めている、再生核の理論の総合的な著書、現在、約420ページ(英文)の原稿を専門書として、完成、出版を具体的な成果、目的にする。

3. 研究の方法

良い計算機とその周辺機器と関係研究者との研究交流が研究計画、方法の本質である。

本方法の適用範囲の拡大とアルゴリズムの開発、成果の発表。

チホノフの正則化と再生核の理論を結びつけた我々の理論が、解空間をペーリー・ウィーナー空間に限定した場合には、従来、非適切性等により解くのは不可能と考えられてきた様々な逆問題への応用が可能であることが判明している。既に典型的な偏微分方程式や積分方程式、常微分方程式への適用は完成しているが、さらに範囲を広げ、変数係数の常微分方程式や、より難しく現実に応用できる逆問題を扱う。

部分境界値を与えた場合のディリクレ問題の調和関数の再構成アルゴリズムの開発、一般サンプリングの定理の確立など。

4. 研究成果

研究課題の大きな展開として再生核とチホノフ正則化法の基本的な応用として、微分方程式に対して、離散化微分方程式という考え方を得た。これは実際に観測するデータは有限個であるという認識を如何に数学的に上手く実現するかという問題意識から考えたものである。再生核の理論がこのような要求に自然に応えるべく驚くほど合っていることを発見した。

具体的な成果としては、変数係数の常微分方程式の解法を、境界値条件を含めて、一般的な状況での解法を得て、それぞれ論文にまとめ、さらに、全空間の定係数の一般の偏微分方程式の離散化方程式の解法についても論文に纏め論文として発表している。

新しい、発想、方法として、実際として使える情報が有限個であるという観点から、順問題や逆問題における解を直接有限個で構成する数学を始めて数編の論文を発表

している。これらの流れの研究は、相当に発展してアヴェイロ離散化法として大きく体系づけて 52 ページの論文に成果が纏められ本の 1 章として出版された。

具体的には 1) 分数関数を作用素を用いて一般的に定義し、表現すること、および数値解析的に求めるアルゴリズムの提案、これは分数関数の性質を導くこと、分数関数を計算機で具体的に求める有効なアルゴリズムを提案している。この間に全く意外なゼロ除算、すなわち、従来不可能であるとされてきた、ゼロで割ることに対して、割り算の自然な一般化として、ゼロ除算が可能になることを発見して、2 篇の論文を発表した。2) convolution で表される積分方程式の再生核の理論を用いた解法、これは最良近似解の表現を求めようとして始めたが、思わぬ深い現象が起きていて、普通の解と一般化解が一致していて一般的に議論したため、扱いは相当に複雑で、深くなっている。3) 数理工学で応用の多い、Toeplitz と Hankel 核を持つ積分方程式の解法、この際は、フーリエ積分をとると非線形の代数方程式になるので、さらに一段と複雑で、難しい問題が生じたが、数学的には、解決できて論文を出版できた。内容が深く、出版まで、5 年くらい掛かってしまった。そして、それらの研究中に偶然に発見した 4) 新しい定義を含む convolution と新しい型の不等式を導いた。チホノフ正則化法を避けて、できるだけ簡単なアルゴリズムを考えようとして、それらの研究中に基本的で、一般的な原理と具体的な成果が得られた：出力測情報が、有限個の点で有限の値をとる、線形システムにおいてそのある自然な意味で最良な逆を求める原理で、ヒルベルト空間の枠内でそれを定式化すると、再生核の理論を用いると驚くほど簡単に、驚くべき簡潔な形で最良逆が定式化できることが分かった。従来挑戦してきたラプラス

変換などでも驚くべき簡潔な結果が得られた。上記の枠組みを超えた研究成果としては、偏微分方程式の初期値問題の具体的な構成に、再生核の理論、積分変換、固有値関数、特殊関数を用いる一般的な理論を具体的な応用とともに展開し、成果が得られた。関係成果は相当な論文として出版することができた。

研究計画の骨格である研究著書出版、仮題：The theory of reproducing kernels - since N. Aronszajn (1950)(英文)を約 424 ページに纏め、共著者澤野嘉宏氏とともに出版社と出版について尚交渉中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件)

1. Castro, L.P., Rodrigues, M.M., Saitoh, S., A fundamental theorem on initial value problems by using the theory of reproducing kernels. 査読の有 [Complex Anal. Oper. Theory](#) 9 (2015), no.1, 87–98.

2. Castro, L.P., Rojas, E.M., Saitoh, S., Tuan, N.M., Tuan, P.D., Solvability of singular integral equations with rotations and degenerate kernels in the vanishing coefficient case. 査読の有 [Anal. Appl\(Singap.\)](#)13(2015), no.1, 1–21.

3. Castro, L.P., Silva, A.S., and Saitoh, S., A reproducing kernel Hilbert space constructive approximation for integral equations with Toeplitz and Hankel kernels, 査読の有 *Libertas Mathematica (newseries)*, 34(2014), No. 1, 1-22.

4. Saitoh, S., Generalized Inversions of

Hadamard and Tensor Products for Matrices, 査読の有 *Advanced in Linear Algebra & Matrix Theory*, 4(2014), 89-95.

5.Kuroda, M., Michiwaki, H., Saitoh, S., and Yamane, M., New meanings of the division by zero and interpretations on $100/0=0$ and on $0/0=0$, 査読の有 *International J. of Math. Applied Mathematics*, 27(2014), 191-198.

6.Castro, L.P., Haque, M.R., Murshed, M.M., Saitoh, S., Tuan, N.M., Quadratic Fourier transforms. 査読の有 *Ann. Funct. Anal.* 5 (2014), no. 1, 10–23.

7.Fujiwara, H., Rodrigues, M.M., Saitoh, S., Tuan, V.K., A new discretization principle in analysis. 査読の有 *Int. J. Math. Comput.* 22 (2014), no. 1, 75–88.

8.Castro, L.P., Murata, K., Saitoh, S., Yamada, M., Explicit integral representations of implicit functions. 査読の有 *Carpathian J. Math.* 29(2013),no. 2, 141–148.

9.Castro,L.P., Saitoh, S., Optimal and approximate solutions of singular integral equations by means of reproducing kernels. 査読の有 *Complex Anal. Oper. Theory* 7(2013), no. 6, 1839–1851.

10.Castro, L.P., Saitoh, S., Fractional functions and their representations. 査読の有 *Complex Anal. Oper. Theory* 7 (2013), no. 4, 1049–1063.

11.Castro, L.P., Itou, H, Saitoh, S., Numerical solutions of linear singular integral equations by means of Tikhonov regularization and reproducing kernels.

査読の有 *Houston J. Math.* 38(2012), no. 4, 1261–1276.

12.Castro, L.P., Saitoh, S., Convolutions, integral transforms and integral equations by means of the theory of reproducing kernels. 査読の有 *Opuscula Math.* 32(2012), no. 4, 633–646.

13.Castro, L.P., Saitoh, S., Sawano, Y., Silva, A., Discrete linear differential equations. 査読の有 *Analysis (Munich)* 32(2012), no. 3, 181–198.

14.Castro, L.P., Saitoh, S., New convolutions and norm inequalities. 査読の有 *Math. Inequal. Appl.* 15(2012), no. 3, 707–716.

15.Castro, L.P., Saitoh, S., Sawano, Y., Simoes, A.M., General inhomogeneous discrete linear partial differential equations with constant coefficients on the whole spaces. 査読の有 *Complex Anal. Oper. Theory* 6(2012), no. 1, 307–324.

16.Castro, L.P., Saitoh, S., Natural outputs and global inputs of linear systems with a finite number of input data. 査読の有 *Appl. Anal.* 91(2012), no. 2, 225–236.

17.Butzer, P.L., Ferraira, P.J.S.G., Higgins, J.R., Saitoh, S., Schmeisser, G., Stens, R.L., Interpolation and sampling: E. T. Whittaker, K. Ogura and their followers. 査読の有 *J. Fourier Anal. Appl.* 17(2011), no. 2, 320–354.

〔学会発表〕(計 11 件)

1.Kuroda, M. Michiwaki, H., Saitoh, S.,

Yamane, M., New meanings of the division by zero and interpretations on $100/0=0$ and on $0/0=0$, 日本数学会、2015.3.23. 明治大学(東京).

2.Michiwaki, H., Saitoh, S., Takagi, M., A new concept for the point at infinity and the division by zero $z/0=0$ (note), 日本数学会、2015.3.23. 明治大学(東京).

3.Saitoh, S., Delicate inequalities for the Tikhonov extremal functions, The Conference on Inequalities and Applications 14, (invited), 2014, 9.7 - 9.13. Hotel Aurum, Hajdszoboszl (Hungary).

4.Saitoh, S., Theory of reproducing kernels and general applications, International Workshop on Learning Theory, (invited), 2013, 9.13-9.16. University of Shaoxing (China).

5.Saitoh, S., Reproducing kernels and discretization, ISAAC 9th Congress, 2013.8.5-8.9. Krakov,(Poland). (組織員)

6.Saitoh, S., A new discretization principle in analysis, (invited), International Conference on Sciences and Applications, 2012.12.26-12.31. Abu Dhabi University (UAE).

7.Saitoh, S., Approximate solutions of general linear integral equations by a finite number of data, Conference of Applied Analysis and Mathematical Biology, 2012.8.8-8.9 Delaware University (USA). (組織員)

8.Saitoh, S., Bounded linear operator equations and a new discretization method by using the reproducing kernel theory, (invited), The 20th International

Conference on finite and infinite dimensional Complex Analysis and Applications, (invited), 2012.7.30-8.3. Hanoi University (Vietnam).

9.Saitoh, S., Inversion of linear systems by a finite number of data, (invited) ICNPAA 2012, 2012.7.19-7.14. Vienna University (Austria).

10.Saitoh, S., Approximate solutions of bounded linear operator equations by the Tikhonov regularization using reproducing kernels, (invited) ICNPAA 2012, 2012.7.19-7.14. Vienna University (Austria).

11.Saitoh, S., Theory of reproducing kernels and its applications, (invited), ICML 2012 Workshop on RKHS and kernel-based methods, 2012.6.26-7.1. Edinburgh University, Scotland (UK).

{ 図書 }(計 8 件)

1.Rodrigues, M.M., Saitoh, S., Whittaker differential equation associated to the initial heat problem, 査読の有 Current Trends in Analysis and Its Applications, 523-530 (2015), *Birkhäuser*.

2.Castro, L.P., Fujiwara, H., Rodrigues, M.M., Saitoh, S., Tuan, V.K., Reproducing Kernels and Discretization, 査読の有 Current Trends in Analysis and Its Applications, 553-560 (2015), *Birkhäuser*.

3.Matsuura,T., Saitoh, S., Dirichlet's Problem by Using Computers with the Theory of Reproducing Kernels, 査読の有 Current Trends in Analysis and Its

Applications, 561-570(2015), *Birkhäuser*.

4. Castro, L.P., Fujiwara, H., Rodrigues, M.M., Saitoh, S., Tuan, V.K., Aveiro
Discretization Method in Mathematics: A
New Discretization Principle, 査読の有
Mathematics Without Boundary Survey
in Pure Mathematics, 37-92(2014),
Springer.

5. Castro, L.P., Fujiwara, H., Qian, T.,
Saitoh, S., How to Catch Smoothing
Properties and Analyticity of Functions by
Computers, 査読の有 Mathematics
Without Boundary Survey in
Interdisciplinary Research,
101-116(2014), Springer.

6. Castro, L.P., Rodrigues, M.M., Saitoh,
S., Initial Value Problems in Linear
Integral Operator Equations, 査読の有
Topics in Mathematical Analysis and
Applications, 175-188(2014), Springer.

7. Castro, L.P., Fujiwara, H., Saitoh, S.,
Sawano, Y., Yamada, A., Yamada, M.,
Fundamental error estimate inequalities
for the Tikhonov regularization using
reproducing kernels. 査読の有 *Inequalities
and applications 2010*, 87-101, [Internat.
Ser. Numer. Math., 161](#),
Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.

8. Castro, L.P., Fujiwara, H., Rodrigues,
M.M., Saitoh, S., A new discretization
method by means of reproducing kernels.
査読の有 *Interactions between real and
complex analysis*, 185-223, *Sci.
Technics Publ. House, Hanoi*, 2012.

〔産業財産権〕
出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤 三郎 (SAITOH SABUROU)

群馬大学・名誉教授

研究者番号：10110397

(2) 研究分担者

松浦 勉 (MATSUURA TUTOMU)

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：80181692

(3) 研究分担者

渡辺 秀司 (WATANABE SYUJI)

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：90222405