

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540118

研究課題名(和文) 逆凸制約を持つ大域的最適化問題に対する区分的分離超平面を用いた反復解法の開発

研究課題名(英文) Development of successive iteration methods utilizing partial separating hyperplanes for a global optimization problem with a reverse convex constraint

研究代表者

山田 修司 (YAMADA, Syuuji)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：80331544

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：逆凸制約をもつ数理計画問題に対する代表的な解法としては、外部近似法や分枝限定法などが挙げられる。しかしながら、これらの手法では高々30次元の問題までしか有効な近似解を求めることができない。そこで、本研究では、区分的分離超平面生成法を導入することで、80次元以上の問題に対しても有効な近似解を求めることができる逐次近似解法を提案した。また、区分的分離超平面生成法を基に、多目的計画の分野で扱われている重要な問題の一つである弱有効解集合上での最適化問題に対する新たな反復解法の開発を行った。さらに、提案手法の有効性を計算機実験で検証した。

研究成果の概要(英文)：In this study, we consider a global optimization problem (GRC) with a reverse convex constraint. For (GRC), many approximation algorithms based on outer approximation methods and branch-and-bound procedures have been proposed. However, since the volume of data necessary for executing such algorithms increases in proportion to the number of iterations, such algorithms are not effective for large scale problems. Hence, to calculate an approximate solution of a large scale (GRC), we propose new iterative solution methods. To avoid the growth of data storage, the proposed methods find an approximate solution of (GRC) by rotating a partial separating hyperplane around a convex set defining the feasible set at each iteration. Moreover, in order to improve the computational efficiency of the proposed methods, we utilize the polar coordinate system. Moreover, we apply the proposed algorithms to optimize a linear function over a weakly efficient set of a multi-objective programming problem.

研究分野：数理計画

キーワード：大域的最適化問題 逆凸制約 分離超平面 逐次近似解法

### 1. 研究開始当初の背景

逆凸制約を持つ線形関数最小化問題は、右図のように局所的な最小解（解の近傍と実行可能領域の共通部分上での最小解）が大域的な最小解（実行可能領域全体の最小解）であるとは限らない数理計画問題であり、大域的な最小解を求めることが困難な問題の一つとされている。

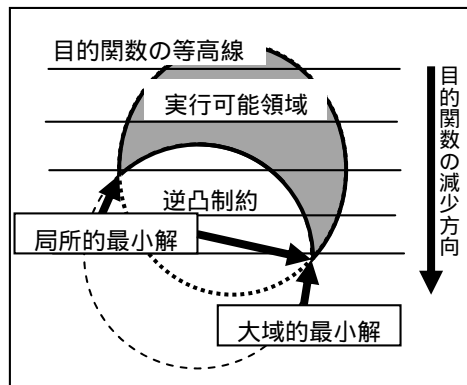


図 1: 逆凸制約を持つ線形関数最小化問題

また、多くの数理計画問題（凹計画、整数計画、双線形計画、分数計画、相補性問題等）がこのような問題に変換できることから、数理計画の分野において、逆凸制約を持つ数理計画問題に対する解法の研究は重要課題の一つであると考えられている。さらに、実社会においては、生産輸送問題や電力輸送ネットワークシステムの運用費用最小化問題等が高次の逆凸制約を持つ数理計画問題として表わされることが知られている。しかし、高次の問題に対して精度の高い近似解を求めることができる解法が存在しないため、実際には妥協策が用いられている。このため、本研究の目的達成が必要とされていた。

### 2. 研究の目的

本研究が対象とする問題に対し、凸多面体逐次近似を用いたアルゴリズムが Tuy 研究グループや本研究グループによって、分枝限定法に基づくアルゴリズムが Horst, Dien 研究グループによって提案されていた。また、本研究グループはこれらの手法と異なる次のアルゴリズムを提案していた。

- (ア) 区分的分離超平面を用いた大域的最適化手法
- (イ) (ア)の手法に極座標系を用いることで高速化を図ったアルゴリズム

従来の凸多面体近似法では、実行可能領域を与えている2つの凸集合の共通部分に対する支持超平面の数を反復毎に増加させることで近似解を求めていた。一方、(ア)の手法は実行可能領域を与えている2つの凸集合の境界集合を区分的に分離する超平面を1つだけ生成し、反復毎にその分離超平面を更新することで近似解を計算していた。このため、

アルゴリズムの実行に必要なデータ量の大幅な削減を実現し、従来法よりも高次の問題（変数の数が30までの問題）に対する近似解の計算を可能にした。また、(イ)の手法は(ア)の手法に極座標系を導入することで、区分的分離超平面が支持している凸集合の境界点と逆凸制約を与えている凸集合の境界集合との最短距離の下界値が効率的に計算できるようになり、アルゴリズムの高速化に成功した。

本研究は、上記(ア)、(イ)の研究を基に、次を目的とした。

**(1) 区分的分離超平面生成方法の改善:** アルゴリズムの実行に必要なデータをすべて極座標系の偏角ベクトルに変換することでデータ量の削減を行い、より高次の問題に有効なアルゴリズムの開発を目指した。また、制約条件を与えている関数の2次近似や局所的最適化手法を導入することで、区分的分離超平面が支持している境界点と逆凸制約を与えている凸集合の境界集合の距離の計算効率を向上させ、さらなるアルゴリズムの高速化を図った。

**(2) 有効解集合上での凸関数最小化への応用:** 凸集合上で複数の線形関数を最適化する多目的計画問題の有効解集合は2つの凸集合の差で近似できる。そこで、上記(1)の研究成果と本研究グループのそれまでに発表した成果を基に、有効解集合上での凸関数最小化問題に対する新たな解法の開発を目指した。

### 3. 研究の方法

**(1) 区分的分離超平面生成方法の改善:** 次の文献を元に、Concavity-Cutに関する資料収集を行った。

R.Horst and H.Tuy, Global Optimization: Deterministic Approaches: Third Revised and Enlarged Edition, Springer, 1996.

上記収集した資料を基に、Concavity-Cutを用いて区分的分離超平面生成方法の改善し、極座標を用いることでデータ量の削減を目指した。また、次の文献を元に2次近似や局所的最適化の資料を収集した。

Bazaraa, Sherali, Shetty 著, Nonlinear Programming: Theory and Algorithms Third Edition, Wiley-Interscience, 2006.

上記収集した資料を基に、制約関数の2次近似や局所的最適化手法を導入し、近傍半径計算方法の改善を図った。さらに、改善したアルゴリズムの有効性を確認するために、計算機実験を行った。

**(2) 有効解集合上での凸関数最小化への応用:** 次の文献を元に、有効解集合上での最適化問題に対する解法に関する資料収集を行った。

Konno, Phan, Tuy 著, Optimization on Low Rank Nonconvex Structures, Springer, 1997.

上記収集した資料と区分的分離超平

面生成法に関する研究生を基に、有効解集合上での凸関数最小化問題に対する新たな解法の開発を試みた。また、新たに開発したアルゴリズムの有効性を確認するために、計算機実験を行った。

#### 4. 研究成果

**(1) 区分的分離超平面生成方法の改善:** 対象問題の実行可能領域は2つの凸集合の差で表せ、それら境界集合の共通部分上に大域的な最小解が存在する。(ア),(イ)で提案した手法は2つの凸集合の境界集合を区分的に分離する超平面を順次更新し、最小解の近似解を求めることを可能にした。そこで、Concavity-Cut (Host, Tuy 著, Global Optimization, Springer, 1996 参照)の理論を用いて区分的分離超平面の生成方法の改善を図り、区分的分離超平面の生成回数、すなわちアルゴリズムの反復回数の削減に成功した。また、区分的分離超平面を決定する法線ベクトル等を極座標系の偏角ベクトルを用いて定義することで、実行に必要なデータ量の削減を可能にした。

**(2) 区分的分離超平面上における分離領域内の近傍半径計算方法の改善:** (ア),(イ)の手法では、各反復において区分的分離超平面上で、暫定解を中心に2つの凸集合の境界集合を分離している信頼領域の半径を計算し、次の区分的分離超平面を生成する暫定解を決定していた。したがって、分離領域内の近傍半径計算方法の精度を向上させることで、アルゴリズムの反復回数の削減を可能にした。このため、制約条件を与えている関数の2次近似や局所的最適化手法を導入し、分離領域内の近傍半径計算方法の改善に成功した。これにより、変数の数が80以上の問題に対しても大域的な最小値と許容誤差内の目的関数値を持つ実行可能解を求めることが可能になった。

**(3) 有効解集合上での凸関数最小化への応用:** 弱有効解集合上での凸関数最小化において、従来法は多目的計画問題の制約集合が凸多面集合の場合に限って有効であったが、この制約集合が一般の凸集合で与えられた場合でも近似解を計算できるアルゴリズムの開発に成功した。また、この研究成果をさらに発展させ、制約集合が逆凸制約を持つ場合にも有効なアルゴリズムを構築した。新たに構築されたアルゴリズムは、対象問題を2つの部分問題に分割し、それぞれの部分問題に対して外部近似法と分枝限定法に基づく異なる操作を行うことで、大域的な最適解に対する精度の高い近似解を求めることを可能にした。このアルゴリズムの有効性は計算機実験により、確認した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9件)

Y.Saito, T.Tanaka, S.Yamada, On Generalization of Ricceri's Theorem for Fan-Takahashi Minimax Inequality into Set-Valued Maps via Scalarization, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 査読有, Volume 16, No. 1, 2015, 9—19

S.Yamada, T.Tanaka, T.Tanino, Successive Search Methods for a Solving a Canonical DC Programming Problem, Optimization, 査読有, Volume 63, No. 3, 2014, 371—384

S.Washio, S.Yamada, T.Tanaka, T.Tanino, Expansion of the Cross Efficiency Evaluation by Using the Equations Forming the Efficient Frontier in DEA, Optimization Methods and Software, 査読有, Volume 28, No. 4, 2013, 889—899

T.Watanabe, S.Yamada, T.Tanaka, Note on the Regularity of Nonadditive Measures, Journal of Applied Mathematics, 査読有, 2013, DOI: 10.1155/2013/234681, 4pages

S.Yamada, T.Tanaka, T.Tanino, Relationships between Vector-Valued Cone-DC and Locally Cone-DC Functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, Volume 398, No. 2, 2013, 588—593

S.Washio, S.Yamada, Evaluation Method Based on Ranking in Data Envelopment Analysis, Expert Systems with Applications, 査読有, Volume 40, No. 1, 2012, 257—262

S.Yamada, Y.Tokushige, T.Tanaka, T.Tanino, An Outer Approximation Method Utilizing the Relation of Connection among Vertices for Solving a DC Programming Problem, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, 査読有, Volume 3, No. 1, 2012, 1—12

S.Washio, S.Yamada, T.Tanaka, T.Tanino, Improvements by Applying the Efficient Frontier in DEA, European Journal of Operational Research, 査読有, Volume 217, No. 1, 2012, 173—184

M.Hojo, T.Tanaka, S.Yamada, Optimality Condition for Vector-Valued DC Programming Problems, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 査読有, Volume 13, No. 1, 2012, 57—64

[学会発表](計 20件)

山田修司, 逆凸制約をもつ2次計画問題に

対するFJ点列挙法を用いた分枝限定法, 2015年日本OR学会春季研究発表会, 2015年03月26日~2015年03月27日, 東京理科大学(神楽坂キャンパス)(東京都新宿区)

S.Yamada, A global optimization method for a quadratic reverse convex programming problem by listing FJ points, 非線形解析と最適化に関する国際ワークショップ, 2015年02月10日~2015年02月13日(招待講演), Pukyong National University(釜山, 韓国)

山田修司, 逆凸制約をもつ2次計画問題に対するKKT点列挙法とその応用, 第57回自動制御連合講演会, 2014年11月10日~2014年11月12日, ホテル天坊(群馬県渋川市)

山田修司, 逆凸制約をもつ2次計画問題に対するKKT点列挙法を用いた大域的最適化手法, 日本OR学会2014年秋季研究発表会, 2014年08月28日~2014年08月29日, 北海道科学大学(北海道札幌市)

S.Yamada, Optimality conditions and an algorithm for a cone-dc vector optimization problem, 非線形解析と最適化に関する第4回アジア会議, 2014年08月05日~2014年08月09日, 国立台湾師範大学(台北, 台湾)

S.Yamada, Optimization over the Efficient Set of a Multiple Objective Linear Programming Problem with Reverse Convex Constraint, ORに関する第20回国際会議, 2014年07月13日~2014年07月18日, バルセロナ国際コンベンションセンター(バルセロナ, スペイン)

山田修司, DC2次計画問題に対する分枝限定法, 第58回システム制御情報学会研究発表講演会, 2014年05月21日~2014年05月23日, 京都テルサ(京都府京都市)

山田修司, 逆凸制約をもつ2次計画問題に対する大域的最適化手法, 2014年日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会, 2014年03月06日~2014年03月07日,

大阪大学(豊中キャンパス), (大阪府豊中市)

S.Yamada, A global optimization algorithm for a quadratic DC programming problem, 最適化技術と応用に関する第9回国際会議, 2013年12月12日~2013年12月16日, 台北, 台湾

山田修司, 逆凸制約をもつ2次計画問題に対するKKT点列挙法を用いた分枝限定法, 第56回自動制御連合講演会, 2013年11月16日~2013年11月17日, 新潟大学(五十嵐キャンパス), 新潟市西区

山田修司, 錐DCベクトル最適化問題に対する最適性条件, 京都大学数理解析研究所共同研究事業研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 2013年10月09日~2013年10月11日, 京都大学数理解析研究所(京都市左京区)

S.Yamada, Some Properties of Vector-Valued Cone-DC Function and Applications, 非線形解析学と凸解析学に関する第8回国際会議, 2013年08月02日~2013年08月06日, 弘前大学(文京町地区キャンパス)(青森県弘前市)

S.Yamada, A Global Optimization Method for a Quadratic Programming Problem with the Reverse Convex Constraint, オペレーションズ・リサーチに関する第26回ヨーロッパ会議, 2013年07月01日~2013年07月04日, ローマ, イタリア

S.Yamada, Optimization over the Weakly Efficient Set of a Multiobjective Programming Problem Constrained by Quadratic Functions, 多基準意思決定に関する第22回国際会議, 2013年06月17日~2013年06月21日, マラガ, スペイン

S.Yamada, A global optimization method for a quadratic dc programming problem by listing KKT points, 非線形解析と最適化に関する2013年国際シンポジウム(招

待講演), 2013年01月31日 ~ 2013年02月02日, 釜山, 韓国

S.Yamada, Optimization over the weakly efficient set, 不確実性の下でのデータ解析と意思決定に関する第15回チェコ -

日本セミナー, 2012年09月24日 ~ 2012年09月27日, 大阪大学(豊中キャンパス)(大阪府豊中市)

S.Yamada, Some properties of vector-valued cone-convex functions, 非線形解析と最適化に関する第3回アジア会議, 2012年09月02日 ~ 2012年09月06日, 松江, 島根県

S.Yamada, Global optimization methods utilizing partial separating hyperplanes for a canonical dc programming problem, 数理計画に関する第21回国際シンポジウム, 2012年08月19日 ~ 2012年08月24日, ベルリン, ドイツ

S.Yamada, Iterative solution methods for a canonical dc programming problem, オペレーショナル・リサーチに関する第25回ヨーロッパ会議, 2012年07月08日 ~ 2012年07月11日, ヴィリニユス, リトアニア  
山田修司, 弱有効解集合上でのリブシッツ最適化問題に対する外部近似法, 第56回システム制御情報学会研究発表講演会, 2012年05月21日 ~ 2012年05月23日, 京都テルサ(京都府京都市)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山田 修司 (YAMADA, Syuuji)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号: 80331544

### (2) 研究分担者

田中 環 (TANAKA, Tamaki)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号: 10207110

### (3) 連携研究者

谷野 哲三 (TANINO, Tetsuzo)  
大阪大学・工学研究科・教授  
研究者番号: 50125605