

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 20 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540119

研究課題名(和文)非周期環境における界面ダイナミクスの数値的研究とその応用

研究課題名(英文) Mathematical analysis of interfacial dynamics in non-periodic environments and its applications

研究代表者

中村 健一 (Nakamura, Ken-Ichi)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：40293120

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題において、周期的ではない空間構造を有する媒質・環境における界面の複雑な時空間ダイナミクスを理解するために、強順序保存力学系における非有界な全軌道の挙動に関する一般論の構築など、新たな解析手法の開発を行った。また、質量保存性やエネルギー散逸性などの変分構造を有する界面ダイナミクスの諸問題に対し、離散化後も同様の構造を持つ数値スキームを提案し、精密かつ安定的に界面を数値的に追跡することに成功した。

研究成果の概要(英文)：In this research project, for understanding the mechanisms of complex spatio-temporal dynamics of interfaces in spatially non-periodic media or environments, we developed new mathematical methods including a general theory for the behavior of unbounded global orbits in a class of strongly monotone semiflows. Furthermore, for various problems on interfacial dynamics with variational structure such as mass conservation and energy dissipation, we proposed stable numerical schemes having the same characteristic properties as the original problems do.

研究分野：応用数学

キーワード：界面ダイナミクス 進行波 移動境界問題

### 1. 研究開始当初の背景

物理的・化学的に均一な状態である2つの相の接触面(境界面)は界面と呼ばれ、その動的ダイナミクスに関する問題は結晶成長などさまざまな物理・化学・生物モデルに頻繁に現れる。界面の運動を記述する方程式(界面方程式)の多くは非線形偏微分方程式系の最高階の項に含まれる微小パラメータの値を0に近づける特異極限の操作によって導出できる。

界面の時間的挙動や空間相互作用に対する数理解析は形態形成の問題の解明とも関連しており、これまで活発に研究がなされてきたが、その多くは界面運動が生じる環境が空間的に一樣な場合に限られており、空間非一樣な環境における界面運動に関する研究は周期的環境などの限られた場合にのみ行われており、準結晶などの非周期的空間構造が界面運動に与える影響についてはほとんど明らかにされていなかった。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、準結晶のような周期的ではないが秩序的な空間構造を有する媒質・環境において時々刻々と変化する界面の複雑な時空間ダイナミクスを、数理解析的手法と数値的手法を相補的に用いて解明することである。特に、以下の問題(1)~(4)に対し、非周期的媒質・環境が界面運動にどのような影響を与えるかという問題に焦点を当て、その解明のための解析手法や数値計算法の開発を推進する。

(1) 非周期的な境界形状を持つシリンダー領域を進行する界面の伝播速度の漸近解析的研究。

(2) 異方性を考慮した結晶表面におけるスパイラル状界面やV字形界面の存在、およびその定性的性質の研究。

(3) 問題(1)および(2)における界面運動に対する数値計算手法の開発、および、その安定性・収束性に関する研究。

(4) 順序保存力学系の一般論構築による、界面方程式および関連する非線形偏微分方程式の平衡解・時間周期解の存在、およびその安定性解析。

### 3. 研究の方法

研究の目的において挙げた問題(1)~(4)それぞれについて以下のような方法で研究を行った。

(1) 解の挙動を精密に評価する比較関数を構成することにより、準周期的な環境の空間構造を細かくするという極限(均質化極限)において、進行界面の伝播速度が収束するオーダーと準周期的環境の秩序構造、特に周期の

個数との関係を明らかにする。

(2) これまでに一樣環境の場合に得られている結果を詳細に検討し、非一樣な場合にも適用可能な部分と適用不可能な部分の切り分けを行うとともに、スパイラル状やV字形の多角形曲線の運動を記述する常微分方程式の詳細な解析により、解曲線が自己交差しないこと、および解曲線の辺が縮退しないことを示す。

(3) 質量保存性、エネルギー散逸性や面積保存性、曲線長短縮性などの系が有する変分構造に着目し、離散変分導関数法などを用いて、離散化後も同様の変分構造を持つ数値スキームを導出することにより、精密かつ安定的に界面を数値的に追跡する。

(4) 非線形放物型方程式の平衡解や時間周期解の存在証明は不動点定理や変分的手法によって行われ、その安定性解析はリヤプノフ関数の構成や解の周りの線形化固有値を調べることにより通常行われるが、順序保存力学系の一般論の構築により、比較定理の成立と保存量の存在だけから平衡解や時間周期解の存在証明およびその安定性解析を行う。

### 4. 研究成果

各問題に対し、以下のような成果が得られた。

(1) について：

非周期的な境界形状を持つシリンダー領域を進行する界面について、界面の挙動を精密に評価する比較関数を構成することに成功し、それを利用して進行界面の伝播速度をある程度精密に評価することができた。これにより、2重周期的な環境の空間構造を細かくするという均質化極限においては、進行界面の伝播速度がその均質化極限に収束する最適なオーダーを少なくとも形式的には得ることができた。

"virtual pinning case"と呼ばれる非常にゆっくりと界面が進行する場合の界面運動の定性的性質を明らかにした。

(2) について：

非等方的な結晶成長を記述する駆動力つきクリスタライン曲率流方程式の解として現れるスパイラル状の多角形曲線の時間変化を調べ、解曲線が自己交差しないこと、および解曲線の辺が有限時間で縮退することなく時間大域的に存在することを示した。さらに、方程式を非線形に拡張した場合にも同様の結果が得られることを証明した。

曲率流方程式に関連するある準線形放物型方程式の爆発解の性質を調べ、ある積分量

に単調性が現れることを示した。

(3) について：

曲率流方程式に代表される移動境界問題に対する安定かつ効率的な数値スキームの構築方法を確立した。特に、面積不変性や曲線長短縮性などの変分構造を持つ移動境界問題に対し、その変分構造を離散化後も保つような数値スキームを提案し、特に一様環境の場合には、移動境界問題特有の幾何学的形状に起因する数値的不安定性を取り除くことに成功した。また、非等方的曲率に依存した界面運動を記述する平面多角形の発展方程式に対しても複雑な界面の挙動が非常に精度で安定的に追跡できることを確認した。

異種のポリマー鎖を化学結合でつなげたブロックポリマーのミクロ相分離を記述する、非局所項を持つ4階の非線形放物型方程式に対し、質量保存性・エネルギー散逸性という元の方程式が有する構造を保存する離散変分法に基づく数値スキームを構築し、その安定性および収束性を証明した。

一般化されたギンツブルグ・ランダウ自由エネルギーの勾配流として得られる6階のCahn-Hilliard型方程式に対し、質量保存性およびエネルギー散逸性という元の方程式が持つ性質を保存する数値スキームを離散変分導関数法に基づいて構築し、その安定性を示した。

BZ反応に現れるスパイラル運動、転位現象に現れる転位曲線の運動、時間に依存した隙間をもつHele-Shaw流れの境界要素法による数値計算や、Hele-Shaw流れの内部問題、外部問題、あるいは吸い込み口や湧き出し口のある場合の問題について、代用電荷法を用いた数値解法について研究し、その有用性に関する結果を得た。

(4) について：

結晶成長にみられるスパイラル状の界面運動を記述する反応拡散方程式を含む、より一般の準線形放物型方程式について考察し、順序保存力学系における非有界な解軌道の挙動に関する一般論を展開することでスパイラル状の解の一意存在や大域的漸近安定性を示した。

何らかの時間不変量を持つ反応拡散方程式などの比較定理と保存則が成立する非線形偏微分方程式系に対し、安定な平衡解（あるいは時間周期解）の存在と一意性、および任意の初期値から出発した解の時間大域的な挙動を、順序保存力学系の一般論を構築することにより明らかにした。これにより、時間遅れの入ったLotka-Volterra競争系や保存量をもつ退化放物型方程式など、幅広い問

題に対し平衡解や時間周期解の安定性解析が可能となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

Tetsuya Ishiwata and Shigetoshi Yazaki, A fast blow-up solution and degenerate pinching arising in an anisotropic crystalline motion, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, 査読有, 34 (2014), 2069-2090.  
DOI: 10.3934/dcds.2014.34.2069

Tetsuya Ishiwata, Crystalline motion of spiral-shaped polygonal curves with a tip motion, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, 査読有, 7 (2014), 53-62.  
DOI: 10.3934/dcdss.2014.7.53

Bendong Lou, Hiroshi Matano and Ken-Ichi Nakamura, Recurrent traveling waves in a two-dimensional saw-toothed cylinder and their average speed, *Journal of Differential Equations*, 査読有, 255 (2013), 3357-3411.  
DOI:10.1016/j.jde.2013.07.038

Hikaru Matsuoka and Ken-Ichi Nakamura, A stable finite difference method for a Cahn-Hilliard type equation with long-range interaction, *The Science Reports of the Kanazawa University*, 査読有, 57 (2013), 13-34.  
URI: <http://hdl.handle.net/2297/36870>

Masato Kimura, Daisuke Tagami and Shigetoshi Yazaki, Polygonal Hele-Shaw problem with surface tension, *Interfaces and Free Boundaries*, 査読有, 15 (2013), 77-93.  
DOI: 10.4171/IFB/295

Ken-Ichi Nakamura and Toshiko Ogiwara, Periodically growing solutions in a class of strongly monotone semiflows, *Networks and Heterogeneous Media*, 査読有, 7 (2012), 881-891.  
DOI: 10.3934/nhm.2012.7.881

Daniel Sevcovic and Shigetoshi Yazaki, Computational and qualitative aspects of motion of plane curves with a curvature adjusted tangential velocity, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 査読有, 35 (2012), 1784-1798.  
DOI: 10.1002/mma.2554

〔学会発表〕(計 18 件)

石渡哲哉, Motion of polygonal curves by crystalline curvature flow, 日本数学会応用数学分科会, 2014 年 9 月 27 日, 広島大学

Toshiko Ogiwara, Convergence results in order-preserving systems and its applications to reaction-diffusion systems, The 10<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations and Applications, 2014 年 7 月 9 日, Madrid, Spain.

Ken-Ichi Nakamura, A mathematical formulation of the discrete variational method for dissipative system, 8<sup>th</sup> European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, 2014 年 5 月 27 日, Gaeta, Italy.

Ken-Ichi Nakamura, Dynamics of fronts in multistable reaction-diffusion equations, SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, 2013 年 12 月 7 日, Orlando, USA.

荻原俊子, 順序保存力学系と生物分子モーターモデルへの応用, 日本数理生物学会, 2013 年 9 月 13 日, 静岡大学.

Shigetoshi Yazaki, On a structure-preserving numerical scheme for moving boundary problems, Equadiff 13, 2014 年 8 月 30 日, Prague, Czech Republic.

Shigetoshi Yazaki, Discretization of moving boundary problems and discretized moving boundary problems, Algorithm 2012, 2012 年 9 月 10 日, Podbanske, Slovakia.

Ken-Ichi Nakamura, Existence and recurrent traveling waves in a two-dimensional undulating cylinder: the virtual pinning case, The 9<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012 年 7 月 4 日, Orlando, USA.

Ken-Ichi Nakamura, Existence and asymptotic stability of periodically growing solutions of nonlinear parabolic equations, The 9<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012 年 7 月 2 日, Orlando, USA.

Tetsuya Ishiwata, Crystalline motion of spiral-shaped polygonal curve with a tip motion, International Conference on Free Boundary Problems, 2012 年 6 月 13 日,

Frauenchiemsee, Germany.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 健一 (NAKAMURA, Ken-Ichi)  
金沢大学・数物科学系・准教授  
研究者番号: 40293120

### (2) 研究分担者

矢崎 成俊 (YAZAKI, Shigetoshi)  
明治大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 00323874

石渡 哲哉 (ISHIWATA, Tetsuya)  
芝浦工業大学・システム工学部・准教授  
研究者番号: 50334917

中村 俊子 (荻原 俊子)  
(NAKAMURA, Toshiko (OGIWARA, Toshiko))  
城西大学・理学部・准教授  
研究者番号: 70316678

### (3) 連携研究者

俣野 博 (MATANO, Hiroshi)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 40126165

### (4) 研究協力者

松岡 光 (MATSUOKA, Hikaru)