

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 13 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540146

研究課題名(和文)量子エントロピーの基礎数理とその情報科学への応用

研究課題名(英文) Mathematical studies on quantum entropy and its applications to information science

研究代表者

古市 茂 (FURUICHI, Shigeru)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：50299327

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題中に査読付き論文を9篇出版し、18件の学会発表を行った。主な成果は以下の通りである。一般化エントロピーの上界下界、Tsallis relative operator entropyの精密な上界下界の導出に成功した。また、metric adjusted skew correlationによるシュレーディンガー型不確定性関係式の導出が成功した。さらに、hypoentropyおよびhypodivergenceに関する数学的性質を明らかにし、これらの一般化されたエントロピーについての研究結果を得た。

研究成果の概要(英文)：I have published 9 peer-reviewed papers and gave my presentations through this research project. The main results are as follows.
I obtained the upper and lower bounds for the generalized entropy and gave the estimation of the upper and lower bounds for Tsallis relative operator entropy. In addition, I derived the Schrodinger type uncertainty relation by metric adjusted skew correlation. Moreover, I studied the mathematical properties for hypoentropy and hypodivergence. I also gave the further results for the generalized hypoentropy and hypodivergence.

研究分野：情報理論

キーワード：量子エントロピー ダイバージェンス 作用素不等式

1. 研究開始当初の背景

1948年のShannonの論文A mathematical theory of communications以降、これまでに情報理論は急速に発展してきた。コンピュータサイエンスの基礎的分野である計算理論や符号理論・暗号理論や人工知能、アルゴリズム論など情報科学の分野は数学を基礎として日々発展している。この情報科学のなかでももっとも理論的かつ数学的な分野が情報理論や情報幾何学である。そして近年、量子系(非可換系)における情報理論や情報幾何学の研究が盛んになってきている。その理由として、1994年のShorによる因数分解のアルゴリズムの発見、1997年~1998年のSchumacherやHolevo等による量子符号化定理の証明がある。これらにより量子系における情報理論への関心が高まり多くの研究者を惹き付けた。これにより、単なる数学的な興味というだけでなく、量子エントロピーおよび量子相対エントロピーを研究する意義・重要性が増した。最近、これらの情報量を基礎として、例えばSmooth Min- and Max-entropyが量子暗号との関連で研究されている。これらは、密度作用素と呼ばれるトレースが1である正作用素に対して定義されるため、函数解析学における作用素論や行列解析の手法を用いて量子情報科学における問題を解決することが多い。

一方、古典的な情報理論において一意性定理、情報源符号化定理及び通信路符号化定理は三大定理とされており、これらが量子系においても成立することが示されたことは意義深い。今後は、古典系の情報理論の発展とともに、ネットワーク情報理論や歪を許した通信路符号化定理等がより精密に研究されていくであろう。また、情報理論においてエントロピーの果たす役割は極めて大きい。たとえば、情報量が満たすべき公理によってエントロピー関数が定数倍を除いて一意に定まる(一意性定理)ことや、エントロピーが圧縮限界を与えている(情報源符号化定理)ことなどが挙げられる。従って、エントロピーの性質を研究することは情報理論において重要である。量子系のエントロピーはvon Neumannエントロピーで定義されるが、それを一般化したTsallisエントロピーについて、近年、私は盛んに研究してきた。特にTsallis相対エントロピーの性質や一意性定理の証明などは大きな結果であった。これによって、Tsallisエントロピーの量子情報理論における役割について研究する意義が生じたと言っても過言ではない。Tsallisエントロピーは非加法性という特徴を持ち、von Neumannエントロピーの一般化となっているためその数学的構造に着目し、明らかにすべき点はまだ多く残っている。情報源符号化定理や通信路符号化定理に関する結果は証明されていないに等しいので、これらの研究を遂行すべきであり、国内外でもこういった研究をしている研究者はまだ極僅かであった。

2. 研究の目的

本研究課題では、正作用素に対して定義される様々な量子系の情報量の基礎数理とそれらの情報科学への応用について研究する。

一経数拡張されたエントロピーとしてRényiエントロピーとTsallisエントロピーは有名である。数年前に、H.Suyariによって古典系のTsallisエントロピーのパラメータの意味が与えられた。さらに、今年、M.MosonyiとF.Hiaiによって、Rényi相対エントロピーに関連した通信路容量の公式が与えられた。これは、Rényi相対エントロピーの情報理論における情報操作的意味を与えるものである。それでは、量子系のTsallisエントロピーやTsallis相対エントロピーにおけるパラメータにはどのような意味があるのだろうか？また、これらの量に対する情報操作的意味はあるのだろうか？つまり符号化定理は存在するのであるだろうか？という疑問を持つことは極めて自然である。本研究課題ではこれらの問題を解決することを念頭に置きながら、古典系を出発点として、Tsallisエントロピーを含む様々な一般化エントロピーに関する学術文献を調べながら、独自の観点から量子系の一般化エントロピーに対する数理基礎とその情報科学への応用を研究する。具体的には、研究の進展によって順序は変更になるかもしれないが、次の項目について、本研究課題において明らかにする予定であった。

(1)Tsallisエントロピーに関する情報源符号化定理の証明を行う。古典系及び量子系においてTsallisエントロピーの一意性定理が証明されたので、次のステップとして、符号化定理の証明に取り掛かる。これにより、Tsallisエントロピーを圧縮限界とする符号の存在が明らかになる。

(2)量子Tsallis相対エントロピーに関連した通信路符号化定理について研究を開始し、量子Tsallis相対エントロピーの量子情報理論における役割を明らかにする。

(3)また、Tsallisエントロピーのように一経数拡張だけに留まることなく、quasi-linear平均を用いたより一般的なエントロピーに対する数理的研究及び、情報操作的な役割を研究していくことにより、一般化エントロピーの数理構造を情報理論という学問の立場から明らかにする。

(4)さらに、符号化定理の証明はそのような符号の存在を示すだけであり具体的な符号語の構成を示すものではない。従って具体的な符号語の構成を明らかにすることも1つの目標である。

(5)最後に、量子系の情報量は作用素に対して定義されており、情報理論や情報幾何学における重要な定理は不等式で示されることが多いので、関連する数理としてトレース不等式や、さらには数学的研究対象として作用素不等式を導く。

3. 研究の方法

古典系の Tsallis エントロピーに対する可変長符号化定理については、研究代表者自身のアイデアとして、一意復号可能性を仮定することにより解決可能である。その量子系への拡張(1)についてはクリアしなければならない数学的な問題がいくつかあるので、その点を、下記にも記載した 2012 年 3 月の国際会議において数名の外国人研究者と議論する予定である。次に、前頁(2)については、今年、M.Mosonyi と F.Hiai によって、書かれた論文を詳細に精読しているところでありこれを一つの手掛かりにできればと考えている。M.Mosonyi 氏とは 2003 年に私がハンガリーに在外研究中に知り合った方であり交友があるので、メールや国際会議などで議論する。これとは別の方法(詳細は下記に記載)も考えている。前頁(3)以降については下記に記載する。本研究課題の期間中、国際会議での発表を通して海外の専門家との議論を行っていく。また、(4),(5)についても随時、研究に取り組んでいく予定である。

4. 研究成果

まず、一般化エントロピーに関する成果としては、いくつかのパラメータ付ダイバージェンスに関する数学的不等式を示すことができた。これは、従来のダイバージェンスに関する不等式の経数拡張となっている。また、その延長として、一般化エントロピー自身に関する上限下限を導出した。これは、別の研究課題である数学的不等式に関するものでヤングの不等式の改善の結果を適用したものである。これらの結果が今後、情報理論の分野でどのように応用されていくかは現時点では不明であるが、今後、頭の置きながら研究を続けていきたい。次に Skew information に関しては、目的通り metric adjusted skew correlation によるシュレーディンガー型不確定性関係式の導出が成功した。これは、山口大学の柳教授との共著で JMAA から出版された。

量子情報理論に係る結果として、山口大学の柳教授および佛教大学の栗山教授との共同研究において、一般化された skew information と一般化された metric adjusted correlation measure に対する不確定性関係を導出した。それには、binomial mean のパラメータに関する凹凸の解析が必要であり、その部分を私が担当し、証明することができた。その結果として上記の課題が一步前進した。そもそもこの研究課題は私が前任校に在籍している頃の 2005 年に前述の 2 名との 3 名の共著で発表した論文が始まりであり、その後、何度かの発展・改善を繰り返してきた 2005 年に IEEE の Transaction of Information Theory に掲載された論文の次に大きな発展としては 2010 年に単著で Physical Review A に発表した論文があるが、今回の結果はそれらを現状で、できる限り一般的な形式で証明したものとなっている。そ

の論文は 2013 年末に、Springer の雑誌 Journal of Uncertainty Analysis and Applications から出版された。次に行列解析に関する結果として、やはり山口大学の柳教授との共著論文で、対数平均の上界と下界の導出を行った。これはユニタリ不変ノルムの 1 つであるフロベニウスノルムの場合に、これまで知られていた Hiai-Kosaki による上界や下界よりもタイトな結果を得ることに成功した。その結果は Springer の雑誌 Journal of Inequalities and Applications から 2013 年末に出版された。さらに、この結果をより一般的なものとするために、ユニタリ不変ノルムに対しても同様の事が成立することを示すのに、東北大学の日合教授と九州大学の幸崎教授に貴重な助言を頂くことによって成功した。特に、幸崎教授の集中講義に出席し、その際に大変貴重な御助言を頂いた。その結果をやはり同じ雑誌から 2014 年 5 月初旬に Unitarily invariant norm inequalities for some means というタイトルで単著論文を発表した。また、ハンガリーのペッツ教授を訪ね、上記の内容を彼のセミナーで講演した。また、パリのワークショップにて、量子力学的エントロピーの最新の講演を聴くことができたし、イスタンブールでは IEEE の国際会議 ISIT2014 に参加し情報理論の最新の興味深い講演を聴くとともに、その会議に参加していた山口大学の柳教授とも上記の 2 篇の論文作成の打ち合わせを行うことが出来た。最後に、私個人の研究対象としては、情報理論のなかでも特にエントロピー理論にあるが、最近は作用素(行列)や不等式への興味もあり、relative operator entropies に関する精密な上界および下界に関する作用素不等式の導出に成功した。

研究目的(5)に関して、対数平均に対するタイトな上界・下界に関するユニタリ不変ノルム不等式を導くことが出来た。次に、算術平均・幾何平均・調和平均の間に成立する不等式の研究成果を得た。なお、この結果は、既に、興味を持たれた邦人研究者によって一般化が試みられているようである。さらに、これらとは少し異なる研究結果として、一般化エントロピーに関する数学的な基本性質を調べたものであり、学会発表は来年度行う予定である。

Tsallis relative operator entropy に関して、中国人研究者が発表した論文をさらに精密に見積もった結果を出版した。この論文に関連して、3 つのパラメータへの一般化された、上界・下界の導出を行った。これは、イラン人 2 名との共同研究である。当初、彼らから送付された原稿にあった結果では些細なものであったため、私のほうで一般的な結果を出して共著として論文を出版した。彼らとは現在も連絡を取り合っており、現在は作用素平均に関する不等式の結果を出しつつあり 2 つの論文として来年度に出版予定である。また、ルーマニアの国際会議で

hypoentropyおよびhypodivergenceに関する成果をルーマニア人2名の共同研究者と発表した。これ以外にもこの会議では単著で、作用素平均に関する不等式に関する講演を行った。さらに、日本人研究者2名とヘロン平均に関する精密な見積を行いその論文を出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計12件)

[1] 査読有, Masatoshi Fujii, Shigeru Furuichi, Ritsuo Nakamoto, Estimations of Heron means for positive operators, Journal of Mathematical Inequalities(10巻1号), pp. 19-30, 2016年3月, 10.7153/jmi-10-02.

[2] 査読有, Mohammad Bagher Ghaemi, Nahid Gharakhanlu, and Shigeru Furuichi, Operator inequalities associated with relative operator entropies, Advances in Inequalities and Applications(2015巻7号), pp. 1-21, 2015年6月, <http://scik.org/index.php/aia/article/view/2221>.

[3] 査読有, Shigeru Furuichi, Precise estimates of bounds on relative operator entropies, Mathematical Inequalities & Applications (18巻3号), pp. 869-877, 2015年5月, 10.7153/mia-18-63.

[4] 査読有, Ken Kuriyama, and Shigeru Furuichi Generalized differences and Abel's type binomial theorems, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.96, No.2(2014), pp.189-196, 2014年11月, 10.12732/ijpam.v96i2.3.

[5] 査読有, Shigeru Furuichi, F.-C.Mitroi-Symeonidis and E.Symeonidis, On Some Properties of Tsallis Hypoentropies and Hypodivergences, Entropy, Vol.16, No. 10(2014), pp. 5377-5399, 2014年10月, 10.3390/e16105377.

[6] 査読有, Shigeru Furuichi, Operator inequalities among arithmetic mean, geometric mean and harmonic mean, Journal of Mathematical Inequalities, Vol.8, No. 3(2014), pp.669-672, 2014年9月, 10.7153/jmi-08-49.

[7] 査読有, Shigeru Furuichi, Unitarily invariant norm inequalities for some means, Journal of Inequalities and Applications, Vol.2014, No.158(2014), pp.1-11, 2014年5月, 10.1186/1029-242X-2014-158.

[8] 査読有, Kenjiro Yanagi, Shigeru Furuichi and Ken Kuriyama, Uncertainty relations for generalized metric adjusted

skew information and generalized metric adjusted correlation measure, Journal of Uncertainty Analysis and Applications, Vol.1, No.12, pp.1-14, 2013年11月, 10.1186/2195-5468-1-12.

[9] 査読有, Shigeru Furuichi and Kenjiro Yanagi, Bounds of the logarithmic mean, Journal of Inequalities and Applications, 2013/ 535, 1-11, 2013年11月, 10.1186/1029-242X-2013-535.

[10] 査読有, Shigeru Furuichi, N. Minculete and F. C. Mitroi, Some inequalities on generalized entropies, Journal of Inequalities and Applications, Vol.2012, No.226(2012), pp.1-17, 2012年12月, 10.1186/1029-242X-2012-226.

[11] 査読有, Shigeru Furuichi, Refined Young Inequalities with Specht's Ratio, J.Egypt.Math.Soc., Vol.20(2012), pp.46-49, 2012年9月, 10.1016/j.joems.2011.12.010

[12] 査読有, Shigeru Furuichi and K.Yanagi, Schrödinger uncertainty relation, Wigner-Yanase-Dyson skew information and metric adjusted correlation measure, J.Math.Anal.Appl., Vol.388, No.2(2012), pp. 1147-1156, 2012年4月, 10.1016/j.jmaa.2011.10.061.

[学会発表](計19件)

[1] Shigeru Furuichi, On some mathematical inequalities for some entropies, The Seventh International Conference on Information, 2015年11月26日.

[2] 藤井正俊, 古市茂, 中本律男, 正作用素に対するHeron meanに関連した不等式, 日本数学会・2015年度秋季総合分科会, 2015年9月15日.

[3] Mitroi-Symeonidis Flavia-Corina, Eleutherius Symeonidis and Shigeru Furuichi, On some properties of Tsallis hypoentropies and hypodivergences, The eighth congress of Romanian Mathematicians, 2015年6月27日.

[4] Shigeru Furuichi, Some inequalities related to operator means, The eighth congress of Romanian Mathematicians, 2015年6月27日.

[5] 古市茂, ある平均に関するユニタリ不変ノルム不等式と作用素不等式について, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第18回シンポジウム, 2014年12月5日.

[6] 古市茂, 相対作用素エントロピーの上界と下界について, 日本数学会2014年度秋季総合分科会 函数解析分科会, 2014年9月27日.

[7] Shigeru Furuichi, On some unitarily

invariant norm inequalities, IWOTA 2014, Amsterdam, 2014年7月18日.

[8] Shigeru Furuichi, Operator inequalities for some means and entropies, Mathematical inequalities and applications 2014 One thousand papers conference, Trogir, Croatia, 2014年6月24日.

[9]古市茂, ある平均に関するユニタリ不変ノルム不等式, 日本数学会2014年度年会 函数解析学分会, 東京, 学習院大学, 2014年3月18日.

[10] 古市茂, 対数平均の上界と下界について, 日本応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会第17回シンポジウム, 松山, 愛媛大学, 2014年1月11日.

[11] 古市茂, ある補助平均函数の凹性と一般化歪情報量の不確定性関係, 第36回情報理論とその応用学会シンポジウム (SITA2013), 伊東, ホテル聚楽, 2013年11月28日.

[12] Shigeru Furuichi, Concavity of an auxiliary mean function and its application, 実解析学シンポジウム2013, 岡山, 岡山大学, 2013年11月4日.

[13] 古市茂, 一般化歪情報量に関する不確定性関係, 日本数学会2013年度秋季総合分会, 松山, 愛媛大学, 2013年9月27日.

[14] 古市茂, 平均に関する行列不等式, 第13回関東作用素論セミナー, 東京, 東京理科大学, 2013年7月27日.

[15] 古市茂, 行列, 不等式, エントロピーに関する話題, 代数幾何ミニ研究集会 (埼玉大学), 埼玉, 埼玉大学, 2013年3月23日.

[16] Shigeru Furuichi, Matrix inequalities on some means, von Neumann seminar in Renyi institute, Budapest, Renyi Institute, 2013年7月4日.

[17] Shigeru Furuichi, Mathematical inequalities on generalized entropies and divergences, The Sixth International Conference on Information, Tokyo, Hotel Arcadia Ichigaya, 2013年5月9日.

[18] Shigeru Furuichi, On some refinements of Young inequalities for positive operators, The Seventh International Workshop on Matrices and Operators, Harbin, China, 2012年7月14日.

[19] Shigeru Furuichi, On some trace inequalities, one hour invited lecture, Chinese Academy of Science, Beijing, China, 2012年5月7日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者 古市茂 (FURUICHI Shigeru) 日本大学・文理学部・教授
研究者番号: 50299327

(2) 研究分担者 (なし)

研究者番号:

(3) 連携研究者 (なし)

研究者番号: