

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 2 日現在

機関番号：33917

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540148

研究課題名(和文) 統計的多重比較法の数理理論

研究課題名(英文) The mathematical theory of statistical multiple comparisons

研究代表者

白石 高章 (SHIRAIISHI, Taka-aki)

南山大学・理工学部・教授

研究者番号：50143160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：統計データの解析としてしばしば分散分析法が使われるが、母平均の一樣性の帰無仮説の検定が行われ、帰無仮説が棄却されても、どの群とどの群に母平均の違いがあるか判定できない。この研究で行われた多重比較法を使うと、どの群とどの群に違いがあるか判定ができる。平均に順序制約がある場合も含め、様々な重要な分布の下で、これまでの多重比較法を優越する閉検定手順を提案し、数理理論によって分布論の解明や検出力の良さを解明した。

研究成果の概要(英文)：We derived the following conclusions (i)-(iv) for multiple comparison procedures in multi-sample models. (i) Suppose that the simple order restriction of means is satisfied under the underlying normal distribution. Then, for the differences among mean responses, a closed testing procedure is superior to the single step Hayter's test (Hayter (1990)). To compute the upper percentiles of the distributions of statistics, the sinc method described in Lund and Bowers (1992) and Stenger (1993) is utilized. (ii) Suppose that the underlying distribution is a normal distribution function with unequal variances. Then, for the differences among mean responses, Shiraishi and Hayakawa (2015) propose a closed testing procedure superior to the single step Games-Howell test. (iii) Suppose that the underlying distribution is unknown. Then nonparametric multiple comparison procedures are discussed. (iv) Under Bernoulli distribution, the theory of multiple comparison procedures are constructed.

研究分野：数理統計学

キーワード：多重比較検定法 閉検定手順 同時信頼区間 分布論 数値解析

## 1. 研究開始当初の背景

ある要因 A があり, k 個の水準を考える。水準は群ともよばれる。水準  $A_i$  における標本の観測値は第 i 標本または第 i 群とよばれ, 平均  $\mu_i$  で同一の連続型分布関数をもつとした。さらにすべての観測値は互いに独立であると仮定した。

正規分布のときの統計解析法は分散分析法である。分散分析法に対応して, 観測値の従う分布  $F(x)$  が未知であってもよいとしたノンパラメトリック法がある。一様性の帰無仮説  $H_0$  を検定した場合, 分散分析法では F 検定が行われ, 分散分析法に対応したノンパラメトリック法では Kruskal and Wallis (1952) の順位検定が実行される。しかしながら, 一様性の帰無仮説  $H_0$  を棄却できても, どの群の平均とどの群の平均に相違があるかを検出できない。

主効果と全平均の点推定は, Puri and Sen (1971) や Shiraiishi (1990) で順位推定法が論じられている。これに対し, パラメトリックおよびノンパラメトリックな多重比較法とよばれる検定と同時区間推定は, どの 2 つの群の間にどのくらい違いがあるかを検出できた。

$F(x)$  が標準正規分布のときに,  $i < j$  を満たすすべての  $(i, j)$  に対して, 帰無仮説  $H_0(i, j): \mu_i = \mu_j$  vs. 対立仮説  $H^A(i, j): \mu_i$  と  $\mu_j$  は異なるのシングルステップの多重比較検定法を Tukey (1953) and Kramer (1956) は提案し論じた。 $F(x)$  が標準正規分布のときに,  $i < j$  を満たすすべての  $(i, j)$  に対して,  $\mu_i - \mu_j$  の同時信頼区間もよく知られている。これらの方法は正規理論に基づくパラメトリックな多重比較法である。

これに対して, Steel (1960) と白石 (2008) は, それぞれ順位に基づくシングルステップのノンパラメトリック多重比較検定とノンパラメトリック同時信頼区間を提案し論じた。

Hochberg and Tamhane (1987) の文中で, シングルステップの多重比較検定を改良したテューキー・ウェルシュの方法や REGW 法ペリの方法等の閉検定手順が紹介されているが, これらの閉検定手順を改良した(検出力の高い)パラメトリックな閉検定手順を白石は論じ, 論文として公表し, 白石 (2011a) の専門書の中で詳しく解説した。ノンパラメトリック多重比較法についても白石 (2011a) の中で解説した。

(1) の連続モデルではなく,  $W_i$  が 2 項分布  $B(n_i, p_i)$  に従っているとし, 白石 (2011b), (2009) は, (2) で  $\mu_i, \mu_j$  を  $p_i, p_j$  に替えた仮説についての多重比較検定と  $p_i$  の相違に関する同時信頼区間を論じた。この場合, 2 項分布の分散は, 平均母数の関数になっているため, 上記でのべた連続モデルの理論をそのまま使って論ずることができず, ベーレンス・フィッシャーの問題のような解決法が必要であった。

## 2. 研究の目的

I. 連続モデルで平均に順序制約ある場合の手法は, Williams (1977) で論じられているが, 1 群との平均相違が成り立つかが判定できただけである。白石 (2011a) の中で論じた多重比較論を使って,  $\mu_i < \mu_{\{i+1\}}$  ( $0 < i < k$ ) となる  $i$  を特定したパラメトリックとノンパラメトリックな閉検定手順を提案したことができたことが解っている。この理論を詰め, 手法の有効性を示す必要がある。このために, 順序制約のある場合には, 順序制約のない場合の白石 (2011a) に掲載された手法よりも, 提案した閉検定手順が優れていることを数学的理論と計算機による数値によって解明したことが必要である。

II. 白石 (2011a) の中で論じた閉検定手順の理論を使って, 正規分布を仮定した 2 元配置モデルにおける多重比較法の理論を構築したことが可能であるので, その研究を行い更に良い方法を見つける。その後, ノンパラメトリックへの拡張を目指す。

III. 2 項モデルに対して, 比率  $p_i$  に順序制約がある場合の多重比較法について, 白石 (2011b) などの理論を使って, 手法を提案し理論を構築した。更に多項分布モデルの多重比較論に発展させる。

IV. 地震などの稀にしか起こらない発生数に関する確率はポアソン分布に従っている。ポアソンモデルにおける多重比較法は, データ解析を行う上で重要な事項であるが, いまだに開発されていない。多群ポアソンモデルにおける多重比較法の開発と理論の構築を行う。白石 (2011b) などの理論を使って理論を構築できたが, 出来る限り良い手法の開発を目指す。更に, 地震の時間に関する分布である指数分布についての多重比較法にも発展させ論じる。

## 3. 研究の方法

これまで私が研究してきた多群連続モデルにおける多重比較法の基礎理論をまとめ, 書籍「多群連続モデルの多重比較法」として出版した。この基礎理論をもとに, 平均母数に順序制約がある場合の多重比較論を構築し, 更に複雑な連続モデルでの多重比較論に発展させる。

多群 2 項モデルにおける多重比較法の基礎理論は白石 (2011b) と白石 (2009) に掲載されている。この基礎理論をもとに, ポアソン分布や多項分布のモデルにおける多重比較論に進展させる。

研究を進めるために多重比較法の研究者や離散モデルの研究者と研究討論した必要がある。また, 資料収集と整理を行う必要がある。さらに学会などで研究発表を行い, 有益なコメントをもらう。

## 4. 研究成果

(1) t 時間に現象 E の生起した回数を  $X(t)$  とし,  $X(t)$  がポアソン過程に従うとした。このとき, 単位時間に起こる現象 E の回数がポアソン分布に従う。一方, ポアソン過程におい

て(i-1)回目の E の生起時点から i 回目の生起時点までの時間の間隔を  $T_i$  としたと、伏見(2004)により、 $\{T_i \mid i > 0\}$  は互いに独立で同一の指数分布に従うことが分かる。単位時間に現象 E の起きる回数が多ければ(少なければ)、現象 E の生起した時間の間隔は短くなる(長くなる)。これにより、ポアソンモデルと指数モデルは表裏の関係にある。ところが、白石(2012b)により、漸近的手法しか 2 群ポアソンモデルの推測法を述べる事ができない。一方、廣瀬・森下(2012)により、2 群指数モデルでは正確な推測法も論述したことができた長所をもっていることが解る。この 2 群指数モデルの推測法の良さと同様に、多群指数モデルの多重比較法の推測論にも優れた性質を与えることを本研究で示した。これにより、ポアソン過程に従う生物データは、時間の間隔の指数モデルの解析手法を使った方がよい。ハザード関数が一定の場合の生存時間分布が指数分布であるので、寿命データの解析にも指数モデルをあてはめることができた。

例えば、発癌物質や放射線の影響を調べるラット等を対象とした毒性試験における寿命データの解析があげられる(Kalbfleisch and Prentice, 2002 の 1 章; Lawless 2003 の 4 章)。

多重比較法の多くの文献は、観測値が正規分布に従う場合の多群モデルで述べられている。分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおけるすべての平均相違の多重比較検定法が、Tukey (1953) と Kramer (1956) によって提案され、現在ではテューキー・クレマー (Tukey-Kramer) 法とよばれている。2 群間の t 検定統計量を  $t_{\{ii'\}}$  としたとき、 $\max_{\{i < i'\}} |t_{\{ii'\}}|$  の分布がスチューデント化された範囲の統計量の分布によって下から抑えられることを Hayter (1984) は示した。長年正しいとされていた  $\max |t_{\{ii'\}}|$  の正確な分布は、実際は  $\max |t_{\{ii'\}}|$  の分布を上から抑える分布であることを白石(2006)は証明した。白石(2006)は、これらの不等式と数値積分を利用して、Tukey-Kramer 法の保守度を調べる事ができた。漸近理論において、以上の正規分布モデルの理論と同様の不等式の現象が起こることが示せる。これにより、指数分布モデルにおけるすべての平均相違の漸近的な多重比較論を論述したことができた。

多群ポアソンモデルの多重比較法を Shiraishi (2012)、白石(2012a)で論述した。Shiraishi (2012)ではテューキー・クレマー型とダネット型の多重比較法について漸近理論しか導いたことができなかった。白石(2012a)ではすべての母平均の多重比較法を述べたが、小標本の場合は保守的な手法で正則条件が必要であることを論じた。

多群の指数モデルの平均母数についての多重比較法について、小標本の場合と漸近理論を使った場合のシングルステップ法とマ

ルチステップの閉検定手順を提案し、それらの理論を構築した。この場合、回数のポアソンモデルで考えるよりも時間の指数モデルで考えた方がよいことが、次の 2 つの結果から解った。ポアソンモデルの平均相違の多重比較法では小標本での統計手法を導いたことができないが、指数モデルでは小標本での統計手法を構築したことができた。ポアソンモデルのすべての平均母数の多重比較法では平均母数に関して正則条件が必要であったが、指数モデルのすべての平均母数の多重比較法では母数に関して正則条件は必要でない。漸近理論と対数変換を使うことによって、次の 3 つの結果を得た。すべての母平均の間の相違の Tukey-Kramer 型多重比較検定法を提案し、保守度をサイズの比の関数として制御できたことを示し、閉検定手順も論じた。対照群との多重比較検定法に関しては、Bonferroni の不等式による手法よりも検出力の高い Dunnett 型多重比較検定法を論じることができた。すべての母平均の多重比較法として逐次棄却型検定法を導いた。

(2) 多群 2 項モデルとして、 $i=1, \dots, k$  に対して  $X_i$  が 2 項分布  $B(n_i, p_i)$  に従うとし、 $0 < p_i < 1$  ( $i=1, \dots, k$ ) を仮定した。  $E(X_i)=n_i p_i$ ,  $V(X_i)=n_i p_i(1-p_i)$  であり、平均パラメータが変われば、分散も変化したモデルである。このとき、 $p_1, \dots, p_k$  の間の相違に関しての多重比較検定について、逆正弦変換を使った Tukey-Kramer 型のシングルステップ法と閉検定手順を白石(2011)は論じた。白石(2011)の中で、提案した閉検定手順は、テューキー・ウェルシュの方法と REGW(Ryan/Einot-Gabriel/Welsch) 法を一樣に改良し、 $k=5$  に対して、ペリの方法(Peritz (1970))をも改良していることが論じられた。 $p_1, \dots, p_k$  の間のすべての差の同時区間推定法が、Hochberg and Tamhane (1987) で述べられているが、信頼区間が -1 または 1 を含む矛盾を起こすことがある。このため、白石(2009)は、対数を使ったロジット変換による漸近信頼区間の構築を行い、この矛盾を解決したことができた。

対照群との比較として、 $p_1, \dots, p_{\{k-1\}}$  と  $p_k$  の間の差の多重比較法が記述されている日本の統計書の中には、逆正弦変換を使わずに、分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおける平均の Dunnett (1955) の多重比較法と同じ構成法の手法を紹介しているものもあり、同時検定や同時区間推定の理論としては誤りである。白石(2009)は、対照群との多重比較法に関しては、Dunnett (1955) の多重比較法と同じ構成法では失敗したことを示し、Bonferroni の不等式による手法を論述した。田中・垂水(1997)にも Bonferroni の不等式による手法が述べられていた。しかしながら、白石(2011)の中で、Dunnett 型多重比較検定法は、逆正弦変換と漸近理論を使

うことによって、分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおける平均の多重比較法と同様の理論を構築したことができたことを示した。この逆正弦変換により、Bonferroni の不等式による手法よりも検出力の高い多重比較検定法を論じることができた。

以上の Tukey-Kramer 型と Dunnett 型の多重比較法については、漸近理論しか議論したことが出来なかった。この論文では、多群 2 項モデルにおいて、すべての母比率  $p_i$  についての多重比較法を論じる。初めに、漸近理論ではなく正確に保守的な手法について論述した。この場合に記述される理論は、1 群問題としてよく知られている Clopper-Pearson (1934) の方法を多群問題に拡張した F 分布の上側 100 % 点を使ったシングルステップの多重比較法である。Clopper-Pearson の方法は、どの文献も厳密な正則条件が述べられていないので、その正則条件を明記した。

次にこのシングルステップ多重比較検定を改良した閉検定手順を述べる。さらにシングルステップの漸近的な多重比較法を述べ、漸近的な閉検定手順として手順が楽な逐次棄却型検定を論じた。

多群ポアソンモデルに対して、カイ自乗分布の上側 100 % 点を確率変数とし、その確率変数の関数がある領域に入る確率がポアソン分布の分布関数で表現できたことを示した。これにより正確に保守的なシングルステップの多重比較検定法を論じることができた。ポアソンモデルの多重比較検定の場合にも、多群 2 項モデルにおける母比率のすべてに関しての多重比較法と同様の漸近理論を構築したことができたことを示した。

(3) 分散の異なる正規分布を仮定した多群モデルにおけるすべての平均相違の多重比較検定法について論じた。Welch (1949) の検定統計量を基にして、Games and Howell (1976) はシングルステップの多重比較検定法を提案した。現在ではゲイムス・ハウエル (Games-Howell) 法とよばれている。マルチステップ法として閉検定手順を提案した。この閉検定手順がゲイムス・ハウエル法を一樣に優越したことをシミュレーションによって論述した。

(4) 分散の等しい  $k$  群正規モデルで、位置母数に傾向性の制約のある場合に、すべての平均相違の多重比較検定として Hayter (1990) は、統計量  $\max(-t_{\{ii'\}})$  を基にした手法を論じた。この順序制約の下で、隣接した平均の多重比較法を Lee and Spurrier (1995a) は提案した。また、Lee and Spurrier (1995b) は順位に基づくノンパラメトリック多重比較法を論じている。これらの多重比較法はシングルステップの方法である。

傾向性の制約と正規分布の下での一様性

の帰無仮説に対する尤度比検定が Barlow et al. (1972) や Robertson et al. (1988) に紹介されているがこの尤度比検定統計量によってシングルステップの多重比較検定や同時信頼区間を構成したことができない。また、傾向性の制約(1.1)の下での一様性の帰無仮説に対するノンパラメトリック検定として、Jonckheere (1954) によって提案された手法があるが、この統計量を使ってシングルステップのノンパラメトリック多重比較検定や同時信頼区間を構成することができない。歴史的にも多重比較検定や同時信頼区間に使われる統計量のほとんどは複数の  $t_{\{ii'\}}$  または複数の 2 標本順位統計量に  $\max$  をとった統計量を基に多重比較法が論述され、データ解析に使用されている。本研究では、Hayter (1990) や Lee and Spurrier (1995a) で論じられた統計量を基に正規母集団でのマルチステップの多重比較法として閉検定手順を提案した。さらに 2 標本順位統計量を基に分布に依らないノンパラメトリックバージョンも提案した。このとき、次の (i) から (v) を論述した。(i) (1.1) の制約と正規母集団の下で、すべての平均相違に対する提案した閉検定手順が Hayter (1990) のシングルステップの多重比較法を優越したことを示した。(ii) 隣接した平均に対する提案した閉検定手順が Lee and Spurrier (1995a) 型のシングルステップの多重比較法を優越したことを示した。

(iii) (i) (ii) で述べた閉検定手順が平均母数に制約のない場合のすべての平均相違に対する白石 (2011a) で述べた閉検定手順を優越したことを、計算機シミュレーションにより検証した。

(iv) 順位に基づくノンパラメトリック多重比較検定法について、(i)、(ii) と同様の結論を得た。

(v) 付加的に分布に依存しないノンパラメトリック同時信頼区間も導いた。

(5) 分散が同一で平均に傾向性がある  $k$  群の正規分布モデルを考える。白石 (2014) は、Hayter (1990) と Lee and Spurrier (1995) のシングルステップの多重比較検定を優越した閉検定手順の理論を構築した。2 群間の  $t$  検定統計量の最大値  $\max(-t_{\{ii'\}})$  の分布の上側 100 % 点を使って優越性の証明をおこなうことができた。

これらの検定で用いる  $\max(-t_{\{ii'\}})$  の分布の上側 100 % 点を求める具体的な計算式を示す。また、Williams (1971) の逐次棄却型検定法で使われる分布の上側 100 % 点を求める計算式を示す。つぎに、これらの計算に現れる密度関数の性質を明らかにし、それらが Lund and Bowers (1992) と Stenger (1993) の sinc 近似で効率的に近似できたことを示す。最後に sinc 近似法の例として、第 1 の閉検定手順のための上側 100 % 点の計算アルゴリズムを与える。また、その有効性を

数値実験により示す。

(6) 分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおけるすべての平均差の多重比較法が、Tukey (1953)と Kramer (1956)によって提案され、現在では Tukey-Kramer 法とよばれている。2 群間の  $t$  検定統計量を  $t_{\{ii'\}}$  としたとき、 $\max |t_{\{ii'\}}|$  の分布が、スチューデント化された範囲の統計量の分布によって下から抑えられることを、Hayter (1984) は示した。分散の等しい  $k$  群正規モデルで、平均に片側の順序制約のある場合のすべての平均相違の多重比較検定として、Hayter (1990) は、統計量  $\max (-t_{\{ii'\}})$  を基にした手法を論じた。この順序制約の下で、Lee and Spurrier (1995) は、隣接した平均の多重比較法を提案し正規分布理論を展開した。本研究では、 $i=1, \dots, k$  に対して  $X_i$  が 2 項分布  $B(n_i, p_i)$  に従うとし  $p_1, \dots, p_k$  の間の相違に関する多重比較検定について論じる。このとき、 $E(X_i) = n_i p_i$ 、 $V(X_i) = n_i p_i (1 - p_i)$  であり、平均母数が変われば、分散も変化したモデルである。このため、逆正弦変換を使わないならば、上記の分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおける平均の多重比較法の理論を適用したことは難しい。処理群の比率  $p_1, \dots, p_{k-1}$  と対照群の比率  $p_k$  の間の差の多重比較法が記述されている日本の統計書の中には、逆正弦変換を使わずに、分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおける平均の Dunnett (1955) の多重比較法と同じ構成法の手法を紹介しているものもあり、多重比較検定や同時区間推定の理論としては誤りである。

白石 (2011a) は、逆正弦変換と漸近理論を使うことによって、分散の等しい正規分布を仮定した多群モデルにおける平均の多重比較法と同様の理論を構築したことができ、次の (a)、(b) を得た。(a) すべての母比率の間の相違の Tukey-Kramer 型多重比較検定法を提案し、保守度をサイズの比の関数として制御できたことを示した。さらに、多重比較検定として白石 (2011b) で紹介した REGW (Ryan/Einot-Gabriel/Welsch) 法とペリの方法を改良した閉検定手順も論じた。(b) 対照群との多重比較検定法に関しては、逆正弦変換により、Bonferroni の不等式による手法よりも検出力の高い Dunnett 型多重比較検定法を論じることができた。さらに、対照群の母比率との相違の閉検定手順として逐次棄却型検定法を導いた。以上は、母比率に制約のない場合の多重比較論であった。

本研究では、母比率に順序制約を仮定した毒性のある物質をより多く摂取したと疾病が起こる確率が上がる。より悪い環境のもとに設置された機械が一定期間に故障した確率は上がる。薬の量を増やすことにより病状が回復した確率が上がる。このような状況では順序制約を置くことが自然である。このとき、

次の (i) から (v) を論じた。(i) Hayter 型のすべての母数相違のシングルステップの多重比較法を提案した。(ii) Lee and Spurrier 型のすべての母数相違のシングルステップの多重比較法を提案した。(iii) Tukey-Kramer 型多重比較検定法よりも、(i)、(ii) で述べた手法の方が良い。(iv) (i)、(ii) で述べた手法を優越した閉検定手順を提案した。(v) (iv) で述べた閉検定手順が、白石 (2011a) で述べた閉検定手順を優越した。

(7) 分散の等しい  $k$  群正規モデルで、位置母数に傾向性の制約のある場合に、標本サイズが等しい条件の下ですべての平均相違の多重比較検定として Hayter (1990) は、統計量  $\max (-t_{\{ii'\}})$  を基にした手法を論じた。この多重比較法はシングルステップの方法である。マルチステップ法として、白石 (2014) は  $\max (-t_{\{ii'\}})$  に基づく閉検定手順を提案し、次の (i)-(iii) の結果を得た。(i) 白石 (2014) の閉検定手順が Hayter (1990) のシングルステップ法を優越していることを数学的に示した。(ii) 計算機シミュレーションによって、総対検出力において、白石 (2014) の閉検定手順が Hayter (1990) のシングルステップ法を 40% 優越したことがあることを検証した。(iii) 白石 (2014) の閉検定手順が平均母数に制約のない場合のすべての平均相違に対する白石 (2011a) で述べた閉検定手順を優越したことを、計算機シミュレーションにより検証した。白石 (2014) の閉検定手順を実行したために必要な  $\max (-t_{\{ii'\}})$  の分布の上側 100 % 点を求める計算アルゴリズムを、白石・杉浦 (2015) は sinc 近似法を使って論述した。傾向性の制約と正規分布の下での一様性の帰無仮説に対する尤度比検定が Bartholomew (1959) によって導かれた。尤度比検定法のより詳しい説明が Barlow et al. (1972) や Robertson et al. (1988) に掲載されている。本研究では、尤度比検定法で用いられた {Bartholomew (1959) が用いた検定} 統計量を基に正規母集団でのマルチステップの多重比較検定法として 2 つの閉検定手順を提案した。そのうちの 1 つの閉検定手順は、白石 (2014) の閉検定手順を {おおよそ} 優越していることを計算機シミュレーションによって検証した。Hayter (1990) のシングルステップ法と白石 (2014) の閉検定手順では標本サイズが等しいとした条件を必要としたが、提案される閉検定手順は、標本サイズが異なったデータに対しても適用が可能である。さらに 2 標本順位統計量を基に分布に依らないノンパラメトリックバージョンも論じた。

(8) 対照群との多重比較検定法として Dunnett (1955) は  $\max |t_{\{1i\}}|$  または  $\max t_{\{1i\}}$  に基づく方法を提案している。一方、薬剤の投与量や毒性物質への曝露量によ

り複数の群が構成される場合には、母平均に順序制約のある多群モデルを考えることができた。母平均に順序制約のある場合の母平均の一樣性の帰無仮説の尤度比検定法が Barlow et al. (1972) や Robertson et al. (1988) に紹介されている。この尤度比検定は、自由度の異なるカイ二乗分布の重み和に従うカイパー自乗統計量に基づいており、F検定よりも格段に検出力が高い方法である。母平均に順序制約のある場合の対照群との多重比較検定法を Williams (1971, 1972) が提案している。Williams (1971, 1972) の方法はマルチステップの閉検定手順である。Williams (1971, 1972) の方法は Hayter (1990) の方法と同様のいくつかの統計量の最大値に基づく手法であるため、標本サイズの制約を受ける。本研究では、母平均に順序制約のある多群モデルにおける対照群との多重比較検定法としてカイパー自乗統計量に基づく閉検定手順を提案し、Williams (1971), (1972) の方法との検出力の比較を行い、提案した方法のサイズに関する優位性も論述した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

“順序制約のある場合のすべての平均相違に対する Bartholomew の検定に基づく閉検定手順”，白石高章，松田眞一 著，日本統計学会誌，45 巻，pp.247--271，(2016)。

“順序制約のある場合の対照群との比較におけるカイパー自乗統計量に基づく多重比較検定法”，白石高章，松田眞一 著，計量生物学，36 巻，pp.85-99，(2015)。

“平均母数に傾向性がある正規多群モデルにおける分布の上側 100 アルファスターパーセント点”，白石高章，杉浦洋 著，日本統計学会和文誌，44 巻，pp.271-314，(2015)。

“母分散が一樣でない多群モデルにおけるすべての母平均相違の閉検定手順”，白石高章，早川由宏 著，計量生物学，35 巻，pp.55--68，(2015)。

“多群連続モデルにおける位置母数に順序制約のある場合の閉検定手順”，白石高章 著，日本統計学会和文誌，43 巻，pp.215--245，(2014)。

“順序制約のある場合の多群比率モデルにおける多重比較法”，白石高章 著，応用統計学，43 巻，pp.1--21，(2014)。

“多群指数モデルにおける平均パラメータの多重比較法”，白石高章 著，計量生物学，

34 巻，pp.1--20，(2013)。

“多群の 2 項モデルとポアソンモデルにおけるすべてのパラメータの多重比較法”，白石高章 著，日本統計学会和文誌，42 巻，pp.55--90，(2012)。

[学会発表](計 2 件)

白石高章 “多群モデルにおける多重比較法の発展的理論”，日本数学会，日本数学会年会統計数学分科会アブストラクト，pp.95-117，2015 年 3 月 23 日，明治大学駿河台キャンパスリバティタワー(東京都千代田区神田駿河台 1-1)。

白石高章 “多重比較の理論と応用：最近の展開” 日本統計学会春季集会，2014 年 3 月 8 日，同志社大学今出川キャンパス良心館(京都市上京区今出川通烏丸東入)。

[図書](計 1 件)

白石高章 著 統計科学の基礎 --- データと確率の結びつきがよくわかる数理 日本評論社，272 頁 (2012)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.seto.nanzan-u.ac.jp/~marble/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

白石高章 (SHIRAISHI, Taka-aki)

南山大学・理工学部・教授

研究者番号：50143160

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：