

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540154

研究課題名(和文)量子場の数理解析

研究課題名(英文)Mathematical analysis on quantum fields

研究代表者

新井 朝雄(Arai, Asao)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80134807

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：(1)ヒルベルト空間上の線形作用素に関する新しい漸近的摂動論を構築し、これを質量0の量子場のモデルに応用し、その基底状態エネルギーが結合定数に関して、任意の有限次数まで漸近展開可能であることを証明した。(2)ボソン-フェルミオンフォック空間上の無限次元ディラック型作用素について摂動作用素がある単純なクラスに属する場合のスペクトル解析を行った。特に、無摂動作用素が0固有値以外に固有値をもたなくても、強結合領域において、ゼロでない固有値が現れることが発見された。(3)有限自由度のボソン-フェルミオン系の統計力学における重要な物理量に対して汎関数積分表示を導いた。

研究成果の概要(英文)：(1) A new asymptotic perturbation theory is constructed for a class of linear operators on a Hilbert space and applied to a model of mass-less quantum fields. As a result, it is shown that the ground state energy of the model has an asymptotic expansion in the coupling constant up to any finite order. (2) A spectral analysis is made on a class of infinite dimensional Dirac operators Q on the abstract boson-fermion Fock space. In particular, it is shown that Q has non-zero eigenvalues in a strong coupling region independently of whether or not the unperturbed part of Q has a non-zero eigenvalue. (3) Functional integral representations are derived for a general class of boson-fermion systems with application to statistical mechanics.

研究分野：数学

キーワード：漸近的摂動論 基底状態 量子場 無限次元ディラック作用素 汎関数積分 フォック空間 ハミルトニアン スペクトル理論

1. 研究開始当初の背景

(1) 量子場の数理解析における主要な研究テーマの一つは量子場が相互作用を行う系の基底状態や励起状態の存在を示し、それらの詳しい物理的性質を明らかにすることである。基底状態の存在は、すでに多くの(非相対論的)量子場モデルにおいて示されていた。しかしながら、基底状態エネルギーの性質はまだ十分には解明されていない状況にあった。

(2) ボソンとフェルミオンが相互作用を行うボソン-フェルミオン系についての一般的な数学的研究は皆無であった。

2. 研究の目的

(1) 基底状態エネルギーは相互作用を特徴づける結合定数の関数になる。そこで結合定数の関数としての基底状態エネルギーが結合定数の変化に対してどのようにふるまうかを調べることは重要な主題の一つとなる。

(2) ボソン-フェルミオン系の物理量の研究のために汎関数積分表示を導出することが重要である。ボソン-フェルミオン系に超対称性が入ると超対称的な系となり、無限自由度の場合、これを記述する基本的な作用素として無限次元 Dirac 作用素が登場する。この作用素の研究、特にそのスペクトル解析は重要な課題の一つである。

3. 研究の方法

(1) 基底状態エネルギーの結合定数に関する振る舞いを見るには、それがハミルトニアン¹の最低固有値であることに注目し、摂動的な見方をするのがさしあたり自然な方法である。しかし、基底状態エネルギーは一般には孤立固有値ではなく、いわゆる埋蔵固有値となる場合がある。特に、本研究の対象としている質量0の量子場が関与する場合は、埋蔵固有値になる。そこで、埋蔵固有値の場合にも通用する新しい漸近的摂動論を構築することへ導かれた。その基本となる着想は、これまでほとんど無視されてきたブルリアン-ウィグナーの形式的摂動論を数学理論として構築することである。

(2) ボソン-フェルミオン系における汎関数積分表示については、基礎となる測度を通常のウィナー測度から振動子測度に取り直す点が重要な点である。

(3) 無限次元 Dirac 作用素のスペクトル解析については、まず、簡単な摂動の場合を考察した。

4. 研究成果

(1) ヒルベルト空間上の線形作用素に関する新しい漸近的摂動論を構築し、これを質量0の量子場モデルのハミルトニアン¹に応用し、その基底状態エネルギーの結合定数に関する漸近的展開を任意のオーダーまで求めた。

(2) 抽象的ボソン-フェルミオンフォック空間上の無限次元 Dirac 作用素のある特別なクラスについて、スペクトル特性とフレドホルム性を調べた。特に、摂動の強結合領域に

おいて、非摂動的効果と解釈される新しい固有値が出現する現象の存在が明るみに出された。

(3) 有限自由度のボソン-フェルミオン系における汎関数積分表示を確立し、応用として、新しいゴールドデン-トンプソン型不等式を導出した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9件)

1 Asao Arai,

Derivation of the Lamb shift from an effective Hamiltonian in non-relativistic quantum electrodynamics. Spectral and scattering theory and related topics, 1-18, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B45, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014. (査読有)

2 Asao Arai,

A special class of infinite dimensional Dirac operators on the abstract boson-fermion Fock space. J. Math. 2014, Art. ID 713690, 13 pp. (査読有)

3 Asao Arai,

A new asymptotic perturbation theory with applications to models of massless quantum fields. Ann. Henri Poincare 15 (2014), no. 6, 1145-1170. (査読有)

4 Asao Arai, Hilbert Space

Representations of Generalized Canonical Commutation Relations, Journal of Mathematics, vol. 2013, Article ID 308392, 7 pages, 2013. doi:10.1155/2013/308392. (査読有)

(査読有)

5 Asao Arai, Asymptotic analysis of the

Fourier transform of a probability measure with application to the quantum Zeno effect, Journal of Mathematical Analysis and Applications 403 (2013), 193-199. (査読有)

6 Asao Arai and Dayantsolmon Dagva,

A class of d-dimensional Dirac operators with a variable mass, ISRN Mathematical Analysis Volume 2013, Article ID 913413, 13 pages. (査読有)

7 [Asao Arai](#), Functional integral representations and Golden-Thompson inequalities in boson-fermion systems, Reviews in Mathematical Physics Vol. 25, No. 8 (2013) 1350015 (43 pages). (査読有)

8 [Asao Arai](#), Mathematical aspects of conserved quantities in a general class of quantum systems. Quantum bio-informatics V, 25-35, QP-PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., 30, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2013. (査読有)

9 [Asao Arai](#) and T. Fuda, Some mathematical aspects of quantum Zeno effect, Lett. Math. Phys. 100 (2012), 245--260. (査読有)

[学会発表](計 7件)

1 [Asao Arai](#), Functional Integral Representations in Boson-Fermion Systems and Applications, Spectral and Scattering Theory and Related Topics, RIMS, Kyoto University, October 16, 2014. 京都大学数理解析研究所(京都府京都市).

2 [Asao Arai](#), Golden-Thompson type inequalities in boson-fermion systems with applications to supersymmetric quantum systems, Symposium on Quantum Fields in Dynamical Nature, on the occasion of Professor Izumi Ojima's retirement, Kyoto University, North Campus, Maskawa Hall, March 5, 2015. (京都府京都市).

3 [新井朝雄](#), 新しい漸近的摂動論と質量ゼロの量子場理論への応用, 九州大学数理学研究院数理物理学セミナー, 2013年1月17日, 九州大学伊都キャン

パス伊都図書館3F中セミナー室7(福岡県福岡市).

4 [Asao Arai](#), A new asymptotic perturbation theory and applications to massless quantum fields.

The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, July 1, 2013, Sapporo Convention Center(北海道札幌市).

5 [Asao Arai](#), Asymptotic expansions in the coupling constant for the ground state energy of the generalized spin-boson model, International Workshop on Noncommutative Analysis and its Future. Prospects, Hokkaido University, August 6, 2013. 北海道大学(北海道札幌市).

6 [新井朝雄](#), 相対論的量子電磁力学の数理, Summer School 数理物理 2013, 連続講義, 東京大学大学院数理科学研究科, 2013年9月28~30日. 東京大学(東京都目黒区).

7 [Asao Arai](#), Asymptotic expansions for the ground state energy of a model with a massless quantum field, RIMS workshop, Mathematical aspects of quantum fields and related topics, October 2, 2013. 京都大学数理解析研究所(京都府京都市).

[図書](計 1件)

1 [新井朝雄](#), 『物理学の数理』, シュプリンガー, 2012.

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:

出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

新井朝雄 (ARAI, Asao)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：80134807

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：