様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：１１１０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１５６

研究課題名（和文）区分的に滑らかな境界をもつ領域における非定常ナヴィエ・ストークス方程式の数理解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis to nonstationary Navier-Stokes equations in a domain with piecewise smooth boundaries

研究代表者
伊藤　成治（ITOH, SHIGEHARU）

弘前大学・教育学部・教授

研究者番号：４０１９３４８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：コップの中の液体やテーブルの上の水滴の運動を具体的な例とした，ナヴィエ・ストークス方程式に対する自由表面問題を研究した。平面の扇形領域において線形化方程式を扱い，一様収束する級数解を構成した。これにより，ヘルダー空間あるいはソボレフ・スロボデツキ空間における解の精密な評価が可能になった。
さらに，半空間におけるナヴィエ・ストークス方程式を考察し、運動エネルギーの時間減衰に対する下からの評価を確立した。特に、下からの評価を導出可能な初期値の特徴づけに成功した。

研究成果の概要（英文）：The free surface problem to the Navier-Stokes equations that the movement of the liquid in a glass or the waterdrop on the table become the concrete examples was studied. In a plain sector, the series solution of the linearized equation which converges uniformly was constructed. Thus, it is possible that the solutions are estimated precisely in the Hoelder space or the Sobolev-Slobodekii space.
Moreover, we consider the Navier-Stokes equations in the half-spaces and derived the lower bound of the rate of the energy decay of the flow. Especially, we succeeded to characterize the profile of the initial data which causes such a lower bound for the flow.

研究分野：数物系科学

キーワード：ナヴィエ・ストークス方程式　ストークス方程式　角がある領域　エネルギー減衰

１．研究開始当初の背景

流体の運動と共に流体が占める領域をも同時に決定する問題を自由表面問題という。自由表面問題の数理解析はその重要性に比べ，問題の複雑さ故に得られている結果は以下に述べる通りごく限られたものである。

流体の運動が時間によって変化する非定常流の場合には，流体星の運動をモデルとした流体の占める領域がすべて自由表面で囲まれている場合のV.A.Solonnikov[1]の一連の研究と，水の波をモデルとした水平方向に無限に広がった領域におけるJ.T.Beale[2], A.Tani(連携研究者)[3]，A.Tani(連携研究者)-N.Tanaka(連携研究者)[4]の研究があげられるのみである。

一方，コップの中の液体やテーブルの上の水滴の運動のように流体の自由表面と固定境界が接触し，流体の占める領域の境界が滑らかであるとは限らない場合に関しては，V.A.Solonnikov(1982), V.G.Mazya-B.A.Plamenevskii-L.Stupelis(1984), A.Friedman-J.J.L.Velazquetz(1995) らが議論しているが，これらはすべてV.A.Kondratiev[5]による，領域の境界が滑らかでない場合の一般楕円型方程式の可解性に関する先駆的な研究に理論の基礎をおくために，上述の結果はすべて，流体の運動が時間によって変化しない定常流の場合に限られている。

以上のことをふまえて，本研究では“区分的に滑らかな境界をもつ領域における非定常流に対する自由表面問題”を研究の対象とする。

[1] Lectures on evolution free boundary problems : classical solutions, Mathematical aspects of evolving interfaces, P.Colli and J.F.Rodrigues Eds., Lecture Notes in Mathematics, 1812, 123-175.

[2] The initial value problem for the Navier-Stokes equations with a free surface, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), 359-392.

[3] Small-time existence for the three-dimensional Navier-Stokes equations for an incompressible fluid with a free surface, Arch. Rational Mech. Anal., 133 (1996), 299-331.

[4] Large-time existence of surface waves in incompressible viscous fl uids with or without surface tension, Arch. Rational Mech. Anal., 130 (1995), 303-314.

[5] Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trans. Moscow Math. Soc., 16 (1968), 227-313.

２．研究の目的

テーブルの上の水滴の運動をモデルにして問題の定式化を詳しく述べる。　空間３次元の半球のような形状の有界領域で考えるべきであるが，先ず第１段階として本研究では２次元流であると仮定する。Ω_0 を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし，その境界は $\Gamma_0 = \{x_2 = \varphi_0(x_1)(\geq 0), \gamma_0^- \leq x_1 \leq \gamma_0^+, \varphi_0(\gamma_0^\pm) = 0\}$ および $\Sigma_0 = \{x_2 = 0, \gamma_0^- \leq x_1 \leq \gamma_0^+\}$ と表されているとする。$t > 0$ で流体が占める領域を Ω_t，その境界を $\Gamma_t = \{x_2 = \varphi(x_1,t)(\geq 0), \gamma_t^- \leq x_1 \leq \gamma_t^+, \varphi(\gamma_t^\pm) = 0\}$ および $\Sigma_t = \{x_2 = 0, \gamma_t^- \leq x_1 \leq \gamma_t^+\}$，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}(x,t) = (v_1, v_2)$，圧力を $p(x,t)$ とすれば，表面張力と大気の運動や重力等の外力の影響が無視できる場合，テーブルの上の水滴の２次元運動の非定常問題は以下のように定式化される。

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} - \nabla \cdot \mathbb{P}(\boldsymbol{v}, p) = 0,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad x \in \Omega_t, t > 0, \quad (1)$$

$v|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad (2)$

$\mathbb{P}(v,p)n = 0, \quad x \in \Gamma_t, t > 0, \quad (3)$

$v_2 = 2\nu D_{12}(u) = 0, \quad x \in \Sigma_t, t > 0. \quad (4)$

ここで，$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$，$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla)$，$\mathbb{P}(v,p) = -p\mathbb{I} + 2\nu\mathbb{D}(v)$，$\mathbb{I}$ は 2×2 単位行列，$\mathbb{D}(v)$ は $(i,j)-$成分が $D_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ $(i,j = 1,2)$ である 2×2 行列，$n = n(x,t)$ は Γ_t の外向き単位法線ベクトル，ν は粘性係数(定数)である。
境界条件 (3)，(4) の中で，(3) は自由表面 Γ_t 上の力学的条件，(4) は固定境界 Σ_t 上で滑りが起こっていることを表している。 固定境界上で，粘着条件ではなく滑る境界条件を課したのは，この種の問題に対して粘着条件は物理学上非合理的であり，滑る境界条件が適合しているという G.W.Young[6]の指摘による。

この種の問題の“時間に関する局所解の一意存在定理の証明”をすることが本研究課題の研究目的である。

[6] Mathematical description of viscous free boundary flows，Free Boundaries in Viscous Flows，R.A.Brown and S.H.Davis Eds.，The IMA Volumes in Math. Appl.，61(1994)，1-27.

３．研究の方法

（１）扇型領域における線形化問題の一意可解性を示し，解の満たす評価式を導く。

（２）初期領域における線形化問題の一意可解性を示し，解の満たす評価式を導く。

（３）非線形問題の時間に関する局所解の一意存在定理を証明する。

４．研究成果

非線形問題を解く際に仮定する必要がある初期条件と境界条件の間の両立性の条件を必要最小限にするためには，線形化問題をコンドラチェフの理論の枠組で微分の階数が自然数である空間で解くのでは不十分で，ヘルダー空間あるいはソボレフ・スロボデツキ空間で解き，そこでの精密な評価式を導くことが必要不可欠である。解を具体的に書き下すことにより関数の最良近似度より滑らかさを見積もるベルンシュタインの定理を適用することが可能となり，線形化問題の解の評価を得ることができた。非線形問題については，通常の逐次近似法により，時間が小さいという状況における解の一意存在定理の証明を現在精査中である。

さらに，半空間における非圧縮ナヴィエ・ストークス方程式の解に対して，そのエネルギー，即ち自乗可積分ノルムの時間減衰に対する下からの評価を確立した。半空間上のナヴィエ・ストークス流は境界条件と非圧縮条件から，全空間の場合に比べ複雑なものになる。本研究では，主要部のストークス流に対して，鵜飼の公式を用いながら，エネルギー時間減衰の下からの評価を導出できるような初期値の特徴づけを行った。主要部のストークス流のエネルギー時間減衰と非線形項部分のエネルギー時間減衰を比較することで，ナヴィエ・ストークス流のエネルギー時間減衰に対する下からの評価を確立した。またこれらの応用として，解のエネルギーが時間とともに集中するようなスペクトル帯の情報を得ることができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

①伊藤成治，扇形領域におけるポアソン方程式に対するノイマン問題，弘前大学教育学部紀要，第 113 号，43-46，2015，査読無.

②Takahiro Okabe，Initial profile for the slow decay of the Navier-Stokes flow in the half-space，J. Evolution Equations，15 (2015)，pp. 149-163，査読有.
DOI: 10.1007/s00028-014-0254-2

③Honda Hirotada-Tani Atusi, Some boundedness of solutions for the primitive equations of the atmosphere and the ocean, ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 95(2015), 38-48, 査読有.
④ Naoya Kanbayashi, Hideo Kozono and Takahiro Okabe, Remark on the stability of the large stationary solutions to the Navier-Stokes equations under the general flux condition, J. Math. Anal. Appl., 409 (2014), pp. 378-392, 査読有.
DOI:10.1016/j.jmaa.2013.07.016
⑤伊藤成治, 扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題(その２), 弘前大学教育学部紀要, 第 110 号, 17-21, 2013, 査読無.
⑥Takahiro Okabe, Lower bound of L^2 decay of the Navier-Stokes flow in the half-space R_+^n and its asymptotic behavior in the frequency space, J. Math. Anal. Appl., 401 (2013), pp.534-547, 査読有.
DOI:10.1016/j.jmaa.2012.12.033
⑦Umehara Morimichi-Tani Atusi, Free-boundary problem of the one-dimensional equations for a viscous and heat-conductive gaseous flow under the self-gravitation, Math. Models Methods Appl. Sci., 23(2013), 1377-1419, 査読有.
⑧伊藤成治, 扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題, 弘前大学教育学部紀要, 第 109 号, 13-16, 2013, 査読無.

〔学会発表〕（計９件）
①Takahiro Okabe, Remark on the asymptotic expansion of the Navier-Stokes flow in the whole space, 若手による流体力学の基礎方程式研究集会, 名古屋大学（名古屋市), 2015 年１月６日.
②Takahiro Okabe, Remark on the asymptotic expansion of the Navier-Stokes flow in the whole space, IRTG Mathematical Fluid Dynamics -Autumn School and Workshop, Bad Boll（ドイツ）, 2014 年 10 月 30 日
③岡部考宏, 二次元ナビエ・ストークス流の時間大域的漸近挙動について, 第３回岐阜数理科学研究会, 飛騨高山まちの博物館（高山市), 2014 年 9 月 8 日.
④Takahiro Okabe, Space-time asymptotics of the 2D Navier-Stokes flow in the whole plane, RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」, 京都大学数理解析研究所（京都市）, 2014 年 7 月 3 日.
⑤岡部考宏, Space-time asymptotics of the two dimensional Navier-Stokes flow in the whole plane, 日本数学会　2014 年度年会, 学習院大学（東京都目白区）2014 年 3 月 18 日.
⑥Takahiro Okabe, Space-time asymptotics of the 2D Navier-Stokes flow in the whole plane, 2nd International Conference on Mathematical Theory of Turbulence via Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics in 2014, ホテル日航奈良（奈良市）2014 年 3 月 4 日.
⑦Takahiro Okabe, Initial profile for the slow decay of the Navier-Stokes flow in the half-space, Conference on nonlinear wave equations and related topics, 北海道大学（札幌市）, 2013 年 2 月 2 日.
⑧Takahiro Okabe, Initial profile for the slow decay of the Navier-Stokes flow in the half-space, Parabolic and Navier-Stokes equations, バナッハ数学研究所, ポズナニ市　（ポーランド共和国）, 2012 年 9 月 4 日.
⑨Takahiro Okabe, Initial profile for the slow decay of the Navier-Stokes flow in the half- space, 第５回日独流体数学国際研究集会, 早稲田大学（東京都新宿区）, 2012 年 6 月 12 日.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
伊藤　成治（ITOH SHIGEHARU）
　弘前大学・教育学部・教授
　研究者番号：40193487

(2)研究分担者
岡部　考宏（OKABE TAKAHIRO）
　弘前大学・教育学部・講師
　研究者番号：00626872

(3)連携研究者
谷　温之（TANI ATUSI）
　慶応義塾大学・名誉教授
　研究者番号：90118969
田中　尚人（TANAKA NAOTO）
　福岡大学・理学部・教授
　研究者番号：00247222