

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540159

研究課題名(和文) 変動する指標をもつ関数空間を基礎とした調和解析とその応用

研究課題名(英文) Harmonic analysis based on function spaces with variable exponent and its applications

研究代表者

中井 英一 (Nakai, Eiichi)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：60259900

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：変動指数を持つハーディー空間、オーリッツ・ハーディー空間に関して、ポアソン積分、アトム分解、リトルウッド・ペイリー分解等による特徴付けを行い、特異積分作用素、分数べき積分作用素等についての有界性を得るとともに、関連する関数空間やその双対空間等の研究と合わせて、理論を完成することができた。また、振動・増大度が変動する関数空間としての一般化モリー・カンパナト空間、Bシグマ・モリー・カンパナト空間、そして、これらを統一した関数空間の理論を開拓した。これらを用いて具体的に偏微分方程式の解の解析を行った。さらに、マルチンゲール理論に関して調和解析的理論を構成した。

研究成果の概要(英文)：We established the theory of Hardy spaces with variable exponent and Orlicz-Hardy spaces, characterizing by Poisson integral, atomic decomposition, Littlewood-Paley decomposition, etc, proving the boundedness of singular and fractional integral operators, and studying related function spaces and their duals. Moreover, we developed the theory of generalized Morrey-Campanato spaces, B-sigma-Morrey-Campanato spaces, and their unified spaces as function spaces with variable oscillation and variable growth conditions. Using these function spaces, we analyzed the properties of solutions of some partial differential equations. Furthermore, we constructed the harmonic analysis theory for martingales.

研究分野：数学、解析学

キーワード：調和解析学 実解析学 関数空間 変動指数 分数べき積分 特異積分

## 1. 研究開始当初の背景

(1) これまでの調和解析が基礎を置く関数空間は、ルベグ空間やリプシッツ空間（ヘルダー空間）など、可積分性や連続性が一樣に保証された関数空間である。これらの関数空間の理論は、20世紀前半に完成した。その後、フーリエ級数の収束条件、作用素の評価、微分方程式の解の滑らかさや可積分性の評価、等に関連して、より精密な尺度をもつ関数空間が次々と考案されてきた。

(2) 近年、変動指数をもつルベグ空間が電気流動学との関連で注目されている。この関数空間に属する関数  $f(x)$  は、位置  $x$  に応じて可積分性が変動する。今世紀に入り、この関数空間上でハーディー・リトルウッド最大作用素の有界性や特異積分作用素の有界性が証明された。さらに変動指数をもつノンホモジニアス型のベゾフ空間やトリーベル・リゾルキン空間等の研究も始まった。しかしながら、変動指数をもつハーディー空間や、その双対空間となるべき変動指数をもつリプシッツ空間は、まだ研究の進んでいないホモジニアス型のベゾフ空間やトリーベル・リゾルキン空間の特別な場合であり、これらは、最近までその適切な定義すら定まっていなかった。

(3) また近年、モリー・カンパナト空間の拡張が行われ、振動・増大度が変動する関数空間として研究が行われるようになった。しかし、まだ研究の蓄積は少なかった。

## 2. 研究の目的

(1) これまでの調和解析は、ルベグ空間やリプシッツ空間（ヘルダー空間）およびこれらを拡張した関数空間を基盤として研究がなされてきた。これらのモリー空間、カンパナト空間、オーリッツ空間、ソボレフ空間、ベゾフ空間、トリーベル・リゾルキン空間等は、その背景に、調和解析で開発されてきた様々な工夫の蓄積と、偏微分方程式等への広範な応用を持っている。本研究では、今世紀に入って研究が盛んになってきた変動指数をもつ関数空間や、振動・増大度が変動する関数空間等、新しい関数空間の萌芽を取り入れ、これまで長年にわたって多くの数学者により研究が積み重ねられてきた調和解析の理論を、変動する指標をもつ関数空間の視点から深めて、応用範囲を大きく広げることが目的とする。

(2) 具体的には、以下にあげる調和解析の中心的で重要な理論を、変動する指標をもつものに拡張することが目的である。リトルウッド・ペリー分解、アトム分解、ウェーブレット分解の各理論、マルチンゲール理論、補間理論。ハーディー・リトルウッド最大作用素、特異積分作用素、分数べき積分作用素の有界性、等々。

## 3. 研究の方法

(1) 変動指数をもつルベグ空間、ムシャラク・オーリッツ空間、および、ムシャラク・オーリッツ・モリー空間等に関して、ハーディー・リトルウッド最大作用素、カルデロン・ジグムンド作用素、一般化分数べき積分作用素の有界性の証明、リトルウッド・ペリー分解、ウェーブレット分解、ソボレフ空間に関する理論、マルチンゲール理論の整備を行う。

(2) 変動指数をもつハーディー空間、オーリッツ・ハーディー空間、およびこれらに関連した関数空間に関して、リトルウッド・ペリー分解、アトム分解等を行い、特異積分作用素、分数べき積分作用素の有界性を証明する。さらに双対空間についても理論を整備する。マルチンゲール理論についても整備する。

(3) 振動・増大度が変動する関数空間として、一般化モリー・カンパナト空間、B シグマ・モリー・カンパナト空間、ローカルモリータイプ空間等に関して、リトルウッド・ペリー分解を行い、特異積分作用素、分数べき積分作用素の有界性を証明する。さらに補間理論を用いて関数空間の拡張を行う。マルチンゲール理論についても整備する。

## 4. 研究成果

(1) **変動指数をもつルベグ空間、ムシャラク・オーリッツ空間、および、ムシャラク・オーリッツ・モリー空間。**

変動指数を持つルベグ空間についてリトルウッド・ペイリー理論を構築し、リースポテンシャルに関するガグリアルド・ニレンバーグ不等式に応用した。変動指数をもつ重み付きルベグ空間のウェーブレットによる特徴づけを行った。さらにウェーブレットを用いて一般のバナッハ関数空間に関する考察を行った。これらにより、以前の研究成果が拡張され、新しい応用が得られた。また、ウェーブレットを用いて初めて変動指数をもつ関数空間を解析し、応用の可能性が広がった。

一般化モリー空間における一般化分数べき積分作用素の有界性の必要十分条件を得た。さらに変動増大度をもつ一般化モリー空間における一般化変動指数分数べき積分作用素の有界性の十分条件を得た。ムシャラク・オーリッツ・モリー空間において、ハーディー・リトルウッド最大作用素の有界性およびリース・ポテンシャルの有界性を示した。また本質的リトルウッド・ペリー作用素類の有界性を証明した。以上により、以前の理論が拡張された。

(2) **変動指数をもつハーディー空間、オーリッツ・ハーディー空間、これらに関連した関数空間、および双対空間。**

変動指数をもつハーディ空間や、その双対空間となるべき変動指数をもつリプシッツ空間（ヘルダー空間）に関して、最近までその適切な定義すら定まっていなかった。その理由は、通常のハーディ空間やリプシッツ空間に関しては、双対性、アトムや最大関数を使った同値な定義、他の関数空間との関係等、多くの性質が知られているのに対し、変動指数をもつハーディ空間、リプシッツ空間では、こうした性質の確認が難しいためである。指数を変動させるだけであるが、それにより関数の平行移動が連続な変換でなくなるなど、大きな困難が発生するのである。

この状況に対して、変動指数を持つハーディ空間と関連する関数空間について、アトム分解、リトルウッド・ペリー分解等による特徴付けを行った。特異積分作用素等についての有界性も得た。また、変動指数を持つハーディ空間の双対空間として、変動増大度をもつカンパナト空間についての理論を構築した。このカンパナト空間は、以前より研究代表者が研究を続けていたものであり、その蓄積が役立った。なお、このカンパナト空間の特別な場合として、変動指数をもつリプシッツ空間が実現できる。

さらに、オーリッツ・ハーディ空間について、ポアソン積分、アトム分解、リトルウッド・ペリー分解等による特徴づけを行った。過去の研究においては、オーリッツ・ハーディ空間を定義するときのヤング関数として、凸関数のみ、または凹関数のみを扱うのを常としていたが、ここで研究したオーリッツ・ハーディ空間は、ヤング関数としてこのような仮定は必ずしも必要のない大変広い関数空間である。この定義によって、これまで研究が行われていなかった関数空間  $H(\log H)$  等が扱えるようになった。この広い定義の関数空間上で、特異積分作用素、分数べき積分作用素等についての有界性も得た。また、オーリッツ・ハーディ空間の双対空間として、一般化カンパナト空間についての理論を構築した。さらに、ローカル・オーリッツ・ハーディ空間、重み付きオーリッツ・ハーディ空間についても理論を整備した。

### (3) 一般化モリー・カンパナト空間、B シグマ・モリー・カンパナト空間、ローカルモリータイプ空間。

近年、モリー・カンパナト空間の様々な形の拡張が行われている。ガルシア・クエルバとヘレロ(1994)、ルーとヤン(1995)、アルバレッツ、グツマン・パルチダとレイキー(2000)、等によって導入されたセントラル・モリー・カンパナト空間、バレンコフとグリエフ(2004)によって導入されたローカルモリータイプ空間、最近、研究代表者によって導入されたBシグマ・モリー・カンパナト空間。これらは、振動・増大度が変動する関数空間としてとらえることができる。これらに

関しては、まだ研究の蓄積が少ない。

本研究では、この振動・増大度が変動する関数空間であるBシグマ・モリー・カンパナト空間について、フーリエ・マルチプライヤー、擬微分作用素、特異積分作用素、カルデロン・ジグムンド作用素、分数べき積分作用素など、種々の積分作用素の有界性を証明した。さらに リトルウッド・ペリー理論の適用を行い、作用素の有界性に応用した。

さらに、補間理論を用いてBシグマ・モリー・カンパナト空間とローカルモリータイプ空間の理論の再構築を行った。これにより、Bシグマ・モリー・カンパナト空間とローカルモリータイプ空間を特別な場合として含む広範な関数空間を定義することができ、さらにBシグマ・モリー・カンパナト空間上で得られていた作用素の有界性が、この広範な関数空間上でも、成り立つことが証明できた。

これらの研究の一部は、ナビエ・ストークス方程式の解の性質の解析に応用できた。この振動・増大度が変動する関数空間については、さらに今後の研究の進展を期待している。

### (4) マルチンゲール理論の実解析的、調和解析的研究。

確率空間においては、一般に位相は定義されず代わりにシグマ集合族の列を解析の手段として用いる。実解析的、調和解析的手法を用いて、確率空間においてモリー・カンパナト空間を定義し、その性質を様々な角度から調べた。さらにマルチンゲール変換の一つとして分数べき積分を定義し、その有界性を得た。続いて、モリー・ハーディ空間、カンパナト・ハーディ空間を定義し、その性質を詳しく調べた。

同様に、実解析的、調和解析的手法を用いて、確率空間におけるカンパナト空間上の掛算作用素の有界性の特徴づけを行った。これを応用して、確率空間におけるマルチンゲール最大作用素について、変動指数を持つルベグ空間上での有界性を証明した。なお、ユークリッド空間上での変動指数を持つルベグ空間での考察では、ログ・ヘルダー連続性が重要な役割を演ずるが、一般に確率空間においては位相に基づく連続性は使えない。マルチンゲールBLO空間に関しても、ベネット型分解や、マルチンゲール最大作用素のBMO-BLO有界性を得るとともに、カンパナト空間上の掛算作用素の有界性を応用することにより、BMO-BMO有界性に対する優位性を示した。

以上のような、実解析的、調和解析的手法を用いたマルチンゲール理論の研究は、始まったばかりであり、今後の進展が楽しみである。

(5) 先行研究やこの3年間の研究で得た成果をまとめ、変動する指標をもつ関数空間に関する入門者向けテキスト（論文①）を作成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 2 件)

① Mitsuo Izuki, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Function spaces with variable exponents -- an introduction --, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 77 (2014), 187--315. (*Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2014, 153--281. <http://www.jams.or.jp/scm/contents/e-2014-2/2014-13.pdf>) 査読有

② Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Orlicz-Hardy spaces and their duals, *Science China Mathematics*, 57 (2014), 903--962. 査読有, DOI:10.1007/s11425-014-4798-y

③ Eiichi Nakai and Gaku Sadasue, Pointwise multipliers on martingale Campanato spaces, *Studia Mathematica*, 220 (2014), 87--100. 査読有, DOI:10.4064/sm220-1-5

④ Eiichi Nakai, Generalized fractional integrals on generalized Morrey spaces, *Mathematische Nachrichten*, 287 (2014), 339--351. 査読有, DOI:10.1002/mana.201200334

⑤ Eiichi Nakai and Gaku Sadasue, Maximal function on generalized martingale Lebesgue spaces with variable exponent, *Statistics & Probability Letters*, 83 (2013), 2168--2171. 査読有, DOI:10.1016/j.spl.2013.06.007

⑥ Yasuo Komori-Furuya, Katsuo Matsuoka, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Integral operators on  $B_{\sigma}$ -Morrey-Campanato spaces, *Revista Matematica Complutense*, 26 (2013), 1--32. 査読有, DOI:10.1007/s13163-011-0091-6

⑦ Hiroshi Ando, Toshio Horiuchi and Eiichi Nakai, Construction of slowly increasing functions, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 75 (2012), 187--201. (*Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2012, 207--221. <http://www.jams.or.jp/scm/contents/e-2012-2/2012-17.pdf>) 査読有

⑧ Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev

embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in  $\mathbb{R}^n$ , *Revista Matematica Complutense*, 25 (2012), 413--434. 査読有, DOI:10.1007/s13163-011-0074-7

⑨ Eiichi Nakai and Gaku Sadasue, Martingale Morrey-Campanato spaces and fractional integrals, *Journal of Function Spaces and Applications*, 2012 (2012), Article ID 673929, 29 pages. 査読有, DOI:10.1155/2012/673929

⑩ Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces, *Journal of Functional Analysis*, 262 (2012), 3665--3748. 査読有, DOI:10.1016/j.jfa.2012.01.004

⑪ Eiichi Nakai and Tsuyoshi Yoneda, Bilinear estimates in dyadic BMO and the Navier-Stokes equations, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 64 (2012), 399--422. 査読有, DOI:10.2969/jmsj/06420399

[学会発表] (計 2 8 件)

① 中井英一, 曾布川拓也, 局所 Morrey-Campanato 空間の一般化と補間理論, 日本数学会年会, 明治大学駿河台キャンパス(リパティタワー)(東京都千代田区), 2015年3月21日 -- 3月24日

② 出来光夫, 中井英一, 澤野嘉宏, Wavelet characterization and modular inequalities for weighted Lebesgue spaces with variable exponent, 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学東広島キャンパス(広島県東広島市), 2014年9月25日 -- 9月28日

③ 中井英一, 貞末岳, A characterization of BLO martingales, 日本数学会年会, 学習院大学目白キャンパス(東京都豊島区), 2014年3月15日 -- 3月18日

④ 中井英一, Pointwise multipliers on BMO and generalized  $L^p$  spaces with variable exponent, Seminar on Harmonic Analysis, Xiamen University, Xiamen, China, 2013年11月19日.

⑤ 貞末岳, 中井英一, Pointwise multipliers on martingale Campanato spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 愛媛大学城北キャンパス(愛媛県松山市), 2013年9月24日 -- 9月27日

⑥ 貞末岳, 中井英一, Maximal function on

generalized martingale Lebesgue spaces with variable exponent, 日本数学会秋季総合分科会, 愛媛大学城北キャンパス (愛媛県松山市), 2013 年 9 月 24 日 -- 9 月 27 日

⑦ 中井英一, Pointwise multipliers on BMO and related topics, Function spaces and their applications, Beijing Normal University, Beijing, China, 2013 年 8 月 21 日

⑧ 中井英一, Generalized fractional integrals on Morrey spaces with variable exponent, Asian Mathematical Conference 2013, Busan Exhibition and Convention Center (BEXCO), Busan, Korea, 2013 年 6 月 30 日 -- 7 月 4 日

⑨ 貞末岳, 中井英一, 澤野嘉宏, Generalized fractional integrals on martingale Morrey-Campanato spaces, 実解析学シンポジウム 2012, 茨城大学理学部 (茨城県水戸市), 2012 年 10 月 26 日 -- 10 月 28 日

⑩ 水田義弘, 中井英一, 澤野嘉宏, 下村哲, Gagliardo-Nirenberg inequality for generalized Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 九州大学 (福岡県福岡市), 2012 年 9 月 18 日 -- 9 月 21 日

⑪ 中井英一, Generalized Morrey spaces and generalized fractional integrals, International Symposium on Banach and Function Spaces 2012, 九州工業大学 (福岡県北九州市) 2012 年 9 月 12 日 -- 9 月 15 日

⑫ 中井英一, Morrey-Campanato spaces, Symposium on Harmonic Analysis, Beijing Normal University, Beijing, China, 2012 年 5 月 21 日

[その他]

ホームページ等

<http://enakai.sci.ibaraki.ac.jp/publication-j.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中井 英一 (NAKAI Eiichi)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号: 60259900

### (2) 研究分担者

堀内 利郎 (HORIUCHI Toshio)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号: 80157057

曾布川 拓也 (SOBUKAWA Takuya)  
早稲田大学・グローバルエデュケーションセンター・教授

研究者番号: 60252946

貞末 岳 (SADASUE Gaku)  
大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号: 40324884

澤野 嘉宏 (SAWANO Yoshihiro)  
首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号: 40532635

### (3) 連携研究者

水田 義弘 (MIZUTA Yoshihiro)

広島工業大学・工学部・教授

研究者番号: 00093815