

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540160

研究課題名(和文) De Branges 空間論を用いた半閉作用素の位相解析的研究

研究課題名(英文) Topological structures for semiclosed operators using de Branges space theory

研究代表者

平澤 剛 (HIRASAWA, GO)

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：10434002

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000 円

研究成果の概要(和文)：ヒルベルト空間上の半閉作用素の集合を距離を用いた位相解析的考察を行うことで、その特性を活かした研究が行なわれた。成果としては、自己共役作用素の集合は半閉な対称作用素の集合において相対的に開であることを示し、それに伴う自己共役作用素を中心とする開球(近傍)の半径を具体的に数値で与えた。このことから、ラプラシアンを中心としてこの半径内にある半閉な対称作用素は自動的に自己共役になることがわかる。また、応用として、Kato-Rellich ポテンシャルを備えたシュレーディンガー作用素の自己共役性に関する既存の定理(Kato-Rellich の定理)を、位相解析的な視点による別証明を与えた。

研究成果の概要(英文)：We study the theory of semiclosed operators in a Hilbert space from the topological view point. We showed that the set of selfadjoint operators is relatively open in the set of semiclosed symmetric operators. From this result, a radius of a ball of a selfadjoint operator is considered naturally, and we give the value of a radius of a ball of Laplacian. This means that semiclosed symmetric operators which is in a ball of Laplacian having the radius as above automatically selfadjoint. As an application, we show the selfadjointness of Schrodinger operators with Kato-Rellich potential from the topological view point.

研究分野：関数解析

キーワード：半閉作用素 DeBranges空間 準線形発展方程式 強解

1. 研究開始当初の背景

(1) 国内・国外の研究動向

数理論物理などの応用で現れる非有界作用素の多くは閉であることが多い。それは正値、対称または自己共役などのクラスに属していたり、これらの和や積で表されていたりと、代数演算と各作用素クラスの関わりを調べることは、摂動論への結び付きからも重要な研究対象である。そこで、この研究を実現するための1つの方法が半閉作用素クラスに距離を与え、代数和による摂動などを位相解析的にアプローチする方法である。距離付け問題に関しては、1951年の閉作用素クラスの距離付けに関する J.D.Newburgh の論文が最初である。しかし、閉作用素クラスは代数的に閉じていないため、S.R.Cardus は代数的に閉じているようなより広いクラスを導入し、半閉作用素と名付けた。それが1973年の論文である。この論文は Banach 空間上における半閉作用素クラスが距離付け可能であることを示す研究ではあるが、近傍の入れ方の複雑さもあるためかこれに続く研究は暫くなかった。

一方、1978年 W.E.Kaufman による Hilbert 空間上の作用素商の研究が登場し、その翌年の1979年には作用素商と半閉作用素の同値性の証明や特徴付けの研究が発表された。これにより、半閉作用素の研究はその商表現の分母・分子に表れる2つの有界作用素の研究に換言され、この方向性による研究には泉野氏による1989年の研究や1993年の研究などがある。

(2) 着想に至った経緯

Banach 空間上の距離付けの論文を作用素商の視点から Hilbert 空間上に焼き直したものが申請者による2007年の

論文である。そこでは、近傍の形をより明確なもので与えられており、それを用いることで半閉作用素クラスの代数構造と位相構造の関連性が調べられている。この距離による近傍はすべて同一の定義域を備えた半閉作用素から成り立っており、応用上重要ではあるが位相空間としては少し強すぎるように思われる。従って、近傍の中に異なる定義域を備えた作用素が自然に混在するようなより弱い位相を考える必要があった。それは一般正則族と呼ばれる作用素族を取り扱っていく上でも必要だからである。そこで申請者は2011年に q-距離を発表。定義域に係るある種の選択関数を用いて定義される q-距離は有界作用素の集合上では作用素ノルムから入る距離に一致する。代数的に閉じている半閉作用素クラスにおいて、このような自然な距離を用いた函数解析学の世界を構築することはとても自然な着想であると思われる。

2. 研究の目的

今後、函数解析学の世界を構築していくにあたり、本研究では以下の点を明らかにする。

(1) 明らかにしたい点

抽象的な立場からの考察として、予想命題「半閉な対称作用素クラスにおいて、自己共役作用素クラスは相対位相に関して開集合である」の成否を明らかにする。

具体的な立場からの考察として、2乗可積分関数空間における自己共役なシュレディンガー型作用素の自己共役性の安定性を調べる。すなわち、非摂動項を中心とする q-距離の近傍の最適な半径を明らかにする。さらに、摂動前後の q-距離が非摂動項を中心とする最適半径の近傍以内に属するような摂動項の位相的条件を明らかにする。

## (2) 学術的な特色・独創性・意義

非有界作用素である半閉作用素をこれと同値な作用素商の視点から考察することで、有界作用素論が適用できる点は学術的な特色である。

半閉作用素の位相構造の研究に対して、deBranges 空間論を適用したり、対称作用素や自己共役作用素のクラスどうしの関係を位相的に特徴付ける研究は申請者が初めてであり、独創的であると考えられる。

代数構造と位相構造の調和した世界を構築していくことは、函数解析学の理念であり学術的に意義がある。

## (3) 予想される結果及び成果

上記の予想命題が証明されれば、自己共役作用素の摂動の安定性に関して、抽象的立場からの枠組みとその保証を与えることになり、函数解析学としての一つの成果であると認識される。また、シュレディンガー型作用素はその保証の具体例を考察するものであり、応用上重要な例でもある。

本研究は、全体構想を構築していくための最初のステップであり、函数解析学的手法を用いてその目標の達成を目指している。摂動論などの既存の理論を追従する立場ではなく大域的な視点による理論構築は、今後多くのケースに適用できる可能性があり函数解析学への学術的な寄与が予想される。

## 3. 研究の方法

自己共役性の安定性を  $q$ -距離による摂動から解析し、de Branges 空間論を用いて抽象・具体の双方から考察していく。まずは、抽象的考察として、研究目的である自己共役性の安定性に関する予想命題を解決する。その方法としては、リゾルベントの安定性の議論に帰着させて問題解決を図る。そのため

には、 $q$ -距離に関するある不等式の評価が重要となる。次に、具体的考察として、シュレディンガー型作用素の自己共役性の安定性を与える近傍の最良な半径を計算する。その方法としては、上記の  $q$ -距離に関する不等式評価に係わる最良定数の計算が重要となる。

## 4. 研究成果

### (1) 主な成果

函数解析的側面からの研究として、和や積などで閉じている Hilbert 空間上の半閉作用素の集合を、距離を用いた位相解析的考察を行うことで、その特性を活かした研究が行なわれた。主な成果として、自己共役作用素の集合は半閉な対称作用素の集合において相対的に開である、という予想命題を示すことができた。次に、この命題を踏まえると、ラプラシアンなどの自己共役作用素を内点にするような開球が存在することになるが、開球の半径を具体的に数値で与えることができた。半径の値が明示されたことにより、ラプラシアンを中心としてこの半径内にある半閉な対称作用素は自動的に自己共役になることを意味しており、作用素の摂動論と距離の関係性を結び付けることができた。さらに、応用として Kato-Rellich ポテンシャルを備えたシュレディンガー型作用素の自己共役性に関する結果、所謂、Kato-Rellich の定理に対して、上記のラプラシアンの半径を用いることで位相解析的な視点による別証明を与えることができた。

一方、実解析的側面からの研究として、差分近似理論の立場から抽象的準線形発展方程式に対する適切性理論を研究した。本研究内容を大雑把に言えば、方程式を支配する作用素の時間依存性に着目し、作用素が時間に関して

連続であることを仮定しないで考察したことである。抽象的發展方程式論において支配する作用素の条件を弱めることは、偏微分方程式の係数に関する条件を弱めることに相当するため、応用上きわめて重要なポイントとなる。作用素が時間に関してある種の可測性をもつという仮定のもとで方程式の時間局所的な強解の一意存在定理が得られた。現在、その証明を検証している段階であるが、本定理が正しければ、一般のバナッハ空間で考察した先行結果はないので抽象發展方程式理論の大きな進展の1つと考えられる。

### (2) 成果の国内外の位置付けとインパクト

国内外において非有界作用素の集合を距離を用いて位相解析的に研究する分野は今のところ知られておらず、本研究の成果はそういう意味でもオリジナルな位置付けを成していると考えられる。また、ラプラシアンなどの開球の半径を具体的に数値化できたのは学術的に興味深く、さらにこの半径を用いることで Kato-Rellich の定理を位相解析的に証明できたことは一定のインパクトを与えている。

### (3) 今後の展望

本研究で得られた主結果が正しいならば非有界作用素を扱う際の枠組みとして、半閉作用素からなる距離空間で考察することが選択肢の一つであることを意味している。

代数演算や位相的な操作(閉包・弱共役)に関して閉じているこの距離空間において、非有界作用素の諸問題を距離位相と関連付けながら考察できることは、位相解析的見地からはとても重要なことである。特に、種々の作用素の自己共役性問題、とりわけ、摂動前後で定義域が異なるような場合の自己共役性に対しては、数理物理に登場する多くの事例にも該当するため、自己共役性問題を作用素ごとの個別問題と考えるのではなく、函数解析的に整備しておくことは必要なことであると同時に、学術的にも意義がある。

## 5. 主な発表論文等

### 〔雑誌論文〕(計5件)

Miura, Takeshi; Hirasawa, Go; Takahasi, Sin-Ei; Hayata, Takahiro  
『A characterization of the stability of a system of the Banach space valued differential equations』  
Math. Inequal. Appl. 16, no. 3, 717-728, 2013. 査読有

### 〔学会発表〕(計4件)

平澤剛 『Löwner 関数による値域のある性質について』関数環研究集会,新潟県新潟市中央区礎町通り3ノ町2086, クロスパルにいがた 生涯学習センター 403 講座室, 2013.12.12.

平澤剛 『代数的次元と不変部分空間について』富山解析セミナー, 富山県 富山市五福 3190, 富山大学 理学部 数学科 情報数理実習室 B121, 2013.10.5.

平澤剛 『半閉部分空間から閉部分空間へ』解析学セミナー, 新潟県 新潟市 西区五十嵐2ノ町8050, 新潟大学 理学部 数学科 A523 教室, 2013. 3.7.

平澤剛 『ラプラシアンの摂動と距離について』富山解析セミナー, 富山県 富山市五福 3190, 富山大学 理学部 数学科 情報数理実習室 B121, 2012.10.6.

### 〔その他〕

茨城大学研究者情報総覧

<http://info.ibaraki.ac.jp/scripts/websearch/index.htm>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

平澤 剛 (HIRASAWA GO)

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：10434002

### (2) 研究分担者

岡 裕和 (OKA HIROKAZU)

茨城大学・工学部・教授

研究者番号：90257254

### (3) 連携研究者

無し