

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540171

研究課題名(和文)種々のマルティンゲール空間とその上の作用素

研究課題名(英文) Structures of some martingale spaces, and operators on these martingale spaces

研究代表者

貞末 岳 (Sadasue, Gaku)

大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：40324884

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：確率論において「公平なゲーム」の抽象化として現れたマルティンゲールは、マルティンゲール空間と関数空間との類似性を通じ、実解析学と深く関わる。本研究ではこの類似を追求し、マルティンゲール・モリー・カンパナート空間の構造を解明し、さらにその上の分数べき積分作用素の有界性を得た。他にも掛け算作用素が有界となる必要十分条件を得て、これを用いて変動指数空間や平均有界変動マルティンゲール空間での最大関数の有界性を導いた。

研究成果の概要(英文)：The notion of martingale, which was established in probability theory as an abstraction of fairness of games, is important in real analysis through the similarity between martingale spaces and function spaces. We study this similarity and obtain the structure of martingale Morrey-Campanato space and the boundedness of fractional integral operators. Besides, we obtain a necessary and sufficient condition for the boundedness of pointwise multiplier. Using this condition, we obtain the boundedness of the maximal functions on spaces with variable exponents and on martingale BMO spaces.

研究分野：確率解析学

キーワード：マルティンゲール モリー・カンパナート空間 分数べき積分作用素 最大関数

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初では、マルティンゲール理論はファイナンス理論など確率論への応用が盛んに研究されており、実解析的側面についての基礎理論の研究は手薄になっていた。そして実解析学、とりわけ Orlicz 空間や Morrey 空間などの関数空間やその上の分数べき作用素の理論は、最大関数を用いる手法を中心にその当時急速に発展しており、「マルティンゲール理論の実解析的な側面の基礎理論を再構築する」ことは有望なことと考えていた。実際当該研究開始前には、分担者の中井氏らとともにマルティンゲール Orlicz-Hardy 空間の構造を atom 分解を用いて調べるとい共同研究を行い、成果が上がっていた。

2. 研究の目的

研究開始当初の目的は

- (1) 種々のマルティンゲール空間、とくに atomic なフィルトレーションを持つ場合にマルティンゲール Morrey 空間を明確に定義し、その前双対空間などの構造を解明する。
- (2) 種々のマルティンゲール空間において分数べき積分作用素を明確に定義し、それが有界となる指標を決定する。
- (3) マルティンゲール変換の一般論を、マルティンゲール空間 Morrey 空間上の分数べき積分作用素を含む形で整備する。であり、さらに応用に適する形を目指し、atomic なフィルトレーションを持つ、という制約を含まない形に理論を一般化して整備することであった。

3. 研究の方法

(1) 本研究では確率論に詳しい代表者が、フィルトレーションや停止時刻等の確率論の技法を用いてマルティンゲールの性質およびマルティンゲール不等式・マルティンゲール変換を調べる部分を担当し、関数空間やその上の作用素に詳しい分担者が種々のマルティンゲール空間の適切な定式化と、その上で考えるべき作用素を選択してそれを解析するという部分を担当した。

(2) 研究の進め方については、主には代表者と分担者との間での電子メールを用いて議論をして論文を書き進め、それを学会や互いの勤務先の訪問を行って確認し、さらには直接の議論を行うことで次の研究の指針を得る、という方法をとった。この際、他の研究者から得たプレプリントなどの情報交換が、研究の指針として相当重要だった。さらに学会を通じて他の研究者の助力を得て研究を進めるとい方法もとった。

4. 研究成果

(1) 分担者の中井氏と共同研究を行い、論文 5 - として発表した。その成果は

atomic なフィルトレーションを持つ場合にマルティンゲール Morrey 空間・マルティンゲール Campanato 空間を定式化し、マルティンゲール空間としてのノルムの基本性質を示した。さらにフィルトレーションにレギュラリティがあるとき、零空間となるパラメータを同定することや Morrey 空間と Campanato 空間が同型となるパラメータの同定を行って、それらの構造を明らかにした。とくに Morrey- Campanato 空間を定める基礎集合を atom のみとしたときと、すべての可測集合としたときとでは、対応する Morrey- Campanato 空間が異なることを例示により明示的に示した。

atomic なフィルトレーションを持つ場合すべてで、マルティンゲール Morrey 空間および弱形マルティンゲール Morrey 空間での最大関数の有界性を示した。とくにこの際レギュラリティを必要としないことがわかった。

Chao-Ombe によって導入された 2 進マルティンゲールに対する分数べき積分作用素を atomic なフィルトレーションを持つ場合すべてに拡張し、さらにフィルトレーションにレギュラリティがあるときに、そのマルティンゲール Morrey 空間・マルティンゲール Campanato 空間での有界性を調べ、有界となる時のパラメータの関係式を同定した。

である。マルティンゲール理論の枠組みで Morrey-Campanato 空間を初めて定式化したもので、マルティンゲール理論の実解析的な側面の基礎理論として意義あるものである。例えば での基礎集合の取り方に関する空間の依存性はこれまで議論されることがなかった新しい点であり、次の (2) につながる研究となっている。

(2) 分担者の中井氏・首都大学東京の澤野氏と共同研究を行い、論文 5 - として発表した。その成果は

atomic なフィルトレーションを持たない場合も含めて、さらに基礎集合にも大きな自由度を与えた形で一般化マルティンゲール Morrey- Campanato 空間を定式化した。そして一般化マルティンゲール Morrey- Hardy 空間・一般化マルティンゲール Campanato-Hardy 空間を新たに定式化した。それにより Burkholder の不等式や John-Nirenberg 型不等式を、この一般化マルティンゲール Campanato 空間へ拡張した。

atomic なフィルトレーションを持つ場合に、フィルトレーションにレギュラリティがない場合も含めてマルティンゲール

ル Morrey- Hardy 空間とマルティンゲール Campanato-Hardy 空間が同型となる十分条件を見出した。

単調な multiplier によるマルティンゲール変換の、一般化マルティンゲール Campanato-Hardy 空間での有界性を調べ、相当な一般性を持つ十分条件を得た。なお単調な multiplier によるマルティンゲール変換は、一般化分数べき積分作用素を含む非常に大きなクラスとなっている。さらに atomic なフィルトレーションがレギュラリティをもつ場合に、一般化分数べき積分作用素の有界性を一般化マルティンゲール Morrey- Hardy 空間において調べ、Gunawan 氏の条件の下で有界となることを示した。

である。(1)での結果のほとんどを拡張したのものとなっており、研究当初の目的をほぼ達成した論文である。とくに atomic なフィルトレーションを持たない場合も含み、そして基礎集合の取り方にも自由度を持つ定式化になっているため、他分野への応用を考える基盤が整ったと言える。他にも分数べき積分作用素にとどまらないマルティンゲール変換への一般化ができたことは、応用に適した作用素が取り扱える可能性を高めている。今後の課題は、離散パラメータから連続パラメータへの移行である。それにより確率論への応用が可能になる。また Morrey 空間の場合は atomic なフィルトレーションが本質的に必要なものはまだ不明であり、このことの解明も残っている。

(3) 分担者の中井氏と共同研究を行い、atomic なフィルトレーションを持つ場合に、変動指数を持つルベグ空間においてマルティンゲール最大関数が有界となる変動指数に関して Lerner 型の十分条件を見出し、論文 5 - として発表した。変動指数を持つ空間に於けるマルティンゲール最大関数に関する結果としては初めてのものといえる。本論文発表後に、主に中国において変動指数を持つ場合のマルティンゲールに関する論文が増え始めており、今後の急速な理論の発展が見込まれる。また、Lerner 型の十分条件は A_p 荷重の理論を用いるものであるため、この方面でも発展の糸口が見つかっている。すなわち、実解析学においては A_p 荷重の理論も変動指数への一般化が進展中であり、この方面でのマルティンゲール理論を切り開いていくことは重要と思われる。

(4) 分担者の中井氏と共同研究を行い、atomic なフィルトレーションがレギュラリティをもつ場合に、一般化マルティンゲール Campanato 空間の pointwise multiplier が有界となる必要十分条件を同定し、さらにそれを pointwise multiplier の具体例の構成に用いて、論文 5 - として発表した。(2)で行った研究の発展であり、雑誌の掲載順は

前後するが、(3),(5)での研究の基盤となった研究であり、マルティンゲール理論での pointwise multiplier に関する結果としては初めてのものといえる。今後はフィルトレーションの制約をなくすことで、より応用に適する形に整備していくことが課題である。特に実解析学では non-doubling 測度に関する pointwise multiplier の理論が発展しつつあり、レギュラリティが不要になる形での整備は特に有望である。

(5) 分担者の中井氏と共同研究を行い、学会発表 5 - , を行った。その成果は

マルティンゲール最大関数及び自然最大関数の BMO-BLO 有界性を示し、それを用いて BLO マルティンゲールの Bennet 型特徴付けを行った。なお、この際通常用いられる予測可能 BMO 空間だけでなく、適合的であるが予測可能ではない BMO 空間でも BMO-BLO 有界性を示すことに成功している

マルティンゲール Campanato 空間の pointwise multiplier を用い、atomic なフィルトレーションを持つ場合に、BMO に属すが BLO に属さない非負マルティンゲールを構成し、で得た BMO-BLO 有界性が、従来知られていた BMO-BMO 有界性からは導かれなかったことを示した。

である。論文発表には間に合わなかったが(4)での結果を利用し、従来の結果を改良したものとなっている。今後は(4)で述べたようにフィルトレーションの制約をなくすことが課題である。また、本研究は離散パラメータでの研究であるが、連続パラメータへの発展、さらには次の(6)に関連した一般の Banach 関数空間へ拡張が見込まれる。

(6) Banach 関数空間におけるマルティンゲール不等式の研究を行い、学会発表 5 - を行った。その成果は

Banach 関数空間の枠組みで Doob 不等式を考察し、associate 空間での Doob 不等式が、もとの Banach 関数空間での双対 Doob 不等式と同値であることを示した。さらに双対 Doob 不等式が成立する Banach 関数空間では、Davis 分解が行えることを示した。

Banach 関数空間の枠組みで、2次変分関数を基盤とする K -空間を定式化した。そしてこれと atom 分解を通して得られる不等式を組み合わせることにより、Herz 型不等式と Fefferman-Garsia 不等式を Banach 関数空間の枠組みへと拡張した。

である。論文発表には間に合わなかったが、従来の再配置不変な Banach 関数空間の枠組みを超えるものとなっており、今後の発展が見込まれる。とくに変動指数空間を含む形で定式化しており、実解析学においては成熟しつつある変動指数空間の理論に対し、新たな方向性を示すものになる可能性がある。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4件)

E. Nakai and G. Sadasue,
Pointwise multipliers on martingale
Campanato spaces,
Studia Math. Vol. 220, 2014, pp.87-100.
DOI:10.4064/sm220-1-5, 査読有

E. Nakai and G. Sadasue,
Maximal function on generalized
martingale Lebesgue spaces with
variable exponent,
Statist. Probab. Lett. Vol. 83, 2013,
pp.2168-2171,
DOI:10.1016/j.spl.2013.06.007, 査読有

E. Nakai, G. Sadasue and Y. Sawano,
Martingale Morrey-Hardy and Campanato
-Hardy Spaces,
J. Funct. Spaces Appl. Vol. 2013, 2013,
Article ID 690258, 14 pages,
DOI:10.1155/2013/690258, 査読有

E. Nakai and G. Sadasue,
Martingale Morrey-Campanato spaces and
fractional integrals,
J. Funct. Spaces Appl. Vol. 2012, 2012,
Article ID 673929, 29 pages,
DOI:10.1155/2012/673929, 査読有

[学会発表](計 7件)

貞末 岳,
A note on Herz type inequalities,
実解析学シンポジウム 2014,
2014/11, 富山大学

貞末 岳,
A characterization of BLO martingales,
日本数学会,
2014/03, 学習院大学

貞末 岳,
A note on BLO martingales,
実解析学シンポジウム 2013,
2013/11, 岡山大学

貞末 岳,
Maximal functions on martingale
Lebesgues spaces with variable
exponent,
日本数学会, 2013/09, 愛媛大学

貞末 岳,
Generalized Morrey-Campanato spaces
of martingales,
日本数学会,
2013/03, 京都大学

貞末 岳,
Generalized fractional integrals on
martingale Morrey-Campanato spaces,
実解析学シンポジウム 2012,
2012/10, 茨城大学

貞末 岳,
マルティンゲール空間の解析学
第 51 回実函数論函数解析学合同シンポ
ジウム(招待講演),
2012/08, 東京理科大学

[図書](計 0件)

[産業財産権]
出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等
該当無し

6. 研究組織

(1)研究代表者
貞末 岳 (SADASUE Gaku)
大阪教育大学・教育学部・准教授
研究者番号: 40324884

(2)研究分担者
中井 英一 (NAKAI Eiichi)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号: 60259900

(3)連携研究者
なし