

平成 27 年 6 月 4 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540176

研究課題名(和文)ディラック作用素のレゾナンス

研究課題名(英文)Resonances of Dirac operators

研究代表者

伊藤 宏 (ITO, Hiroshi)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：90243005

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：相対論的量子力学に現れるディラック(Dirac)作用素のスペクトルの性質について調べた。ディラック作用素は有界な磁場ポテンシャルと遠方で発散する電場ポテンシャルをもち、それらにある種の解析を仮定した。最初に、ディラック作用素のスペクトルの構造を決定した。次に、光速が十分大きい場合に非相対論的量子力学における2つのパウリ(Pauli)作用素の固有値やレゾナンス(複素固有値)の近くにディラック作用素のレゾナンスが存在することを示した。

研究成果の概要(英文)：We study the spectral properties of the Dirac operator, appeared in the relativistic quantum mechanics, with a bounded magnetic potential and an unbounded electric potential. These potentials are assumed to be analytic in some sense. We first determine the structure of the spectrum of the Dirac operator. Then, we show that if the speed of light is sufficiently large the Dirac operator has resonances (complex eigenvalues) near eigenvalues and resonances of two Pauli operators appeared in the nonrelativistic quantum mechanics.

研究分野：量子力学におけるスペクトル理論および数学的散乱理論

キーワード：ディラック作用素 パウリ作用素 スペクトル レゾナンス 非相対論的極限 シュレーディンガー作用素

1. 研究開始当初の背景

ディラック作用素およびシュレーディンガー作用素は各々相対論的量子力学、非相対論的量子力学において基本的な役割を果たす重要な作用素であり、そのスペクトル構造の研究は数理論物理学における中心的な研究の一つである。磁場を持たないディラック作用素は、非相対論的極限（光速を無限大にする極限）においては、シュレーディンガー作用素に何らかの意味で近づくと考えられてきた。実際、ポテンシャルが遠方で減衰するような場合には両者のスペクトル構造は類似して、固有値問題や散乱理論においてこの予想が正しいことが示されていた。しかし、ポテンシャルが遠方で発散する場合には、シュレーディンガー作用素の固有値が離散スペクトルからなるのに対して、ディラック作用素のスペクトルは実軸全体となり、大きく異なる。そこで、伊藤宏（研究代表者）は、山田修宣（連携研究者）と平成 21～23 年度の科学研究費（基盤研究(C)21540187）による研究において、ディラック作用素が遠方で発散する解析的な電場ポテンシャルをもつ場合に以下の結果を得た：(1)ディラック作用素のスペクトル構造を解明。(2) 光速が大きい場合には、2つのシュレーディンガー作用素の固有値やレゾナンスの近くにディラック作用素のレゾナンスが存在し、非相対論的極限においてシュレーディンガー作用素の固有値やレゾナンスに収束する。(3) シュレーディンガー作用素の固有値近傍では、他にレゾナンスは存在しない。一方、磁場が入った場合には、作用素のスペクトル構造が多様になることが予想されたが、技術的な問題もあり、その研究にはまだ至らなかった。

2. 研究の目的

遠方で発散する解析的なポテンシャルをもつディラック作用素について、以下の3つを研究目的とした。

- (1) 今までの研究では、レゾナンスの存在・非存在については、複素平面内のある3箇所の有界領域においてのみわかっていて、他の領域ではまったくわかっていなかった。そこで、複素平面全体で、その存在・非存在領域を完全に決定すること。
- (2) 遠方で発散するポテンシャルの場合、球対称な関数に近い場合には、埋め込まれた固有値の非存在が知られていた。そこで、ポテンシャルの解析性を用いて固有値の非存在を証明すること。
- (3) 一般に、磁場をもつディラック作用素のスペクトルは多様な様相を示すことが予想されている。そこで、磁場を入れたディラック作用素のスペクトル構造の解析と非相対論的極限におけるレゾナンスの解析を行う。

3. 研究の方法

- (1) 「作用素論セミナー」(京都大学)、「解析

セミナー」(愛媛大学)などの定期的なセミナーや、「夏の作用素論シンポジウム」、「実函数論・函数解析学合同シンポジウム」、「超局所解析と古典解析」などのシンポジウム、「日本数学会」を主に利用し、連携研究者との研究連絡や他の研究者との情報交換などを行った。また、「夏の作用素論シンポジウム」、「超局所解析と古典解析」、日本数学会函数解析分科会一般講演、「TAIWAN-JAPAN, Joint Conference on PDE and Analysis」などで研究成果を発表した。さらに、課題研究に関係する研究者にこれらのセミナーやシンポジウムに参加してもらい、講演や議論を行ってもらった。

(2) 課題研究のために必要な書籍やパソコンとその周辺機器を購入した。パソコンにより、最新の研究の情報収集や文献の整理などを行った。

(3) 研究代表者や連携研究者は、以下の役割分担で課題研究やその周辺に関する研究を行った。

伊藤 宏

ディラック作用素のレゾナンスの存在・非存在領域の決定と磁場を入れたときの解析。

山田修宣（連携研究者）

埋め込まれた固有値の非存在の証明。

田村 英男（連携研究者）

デルタ型磁場をもつシュレーディンガー作用素のレゾナンスの解析。

岩塚 明（連携研究者）

磁場をもつパウリ作用素やディラック作用素のスペクトルの解析。

野村 祐司

周期的に並んだアハロノフ・ボーム磁場と定数磁場をもつシュレーディンガー作用素の解析および双曲空間上の作用素への拡張。

4. 研究成果

研究代表者(伊藤)による主な結果(1)を述べる。また、連携研究者による関連する研究の中で特に関係の深い(2),(3)の成果についても記載する。これらの結果はすべて現在活発に研究されている量子力学のスペクトル理論における固有値やレゾナンスに関する新しい結果であり、今後のこの研究分野の進展にもつながるものと思われる。

- (1) 研究目的の(1),(3) に関してある程度の結果を得ることができ、学会やシンポジウムなどで発表した。少しずつ進展してきたが、ここでは、得られた結果の中でもっとも新しい結果を述べる(2014年9月日本数学会函数解析分科会一般講演で発表)。尚、(2)については残念ながら期間中に結果を得ることが出来なかった。

有界な磁場ポテンシャルと遠方で多項式のオーダーで発散する電場ポテンシャルをもつ3次元ユークリッド空間上のディラック作用素を考える。ポテンシャルには伸長解

析性を仮定する．このディラック作用素のスペクトル構造について以下の結果を得た．

スペクトルは実軸全体であり，埋め込まれた固有値は存在したとしても離散的であり，多重度は有限である．特異連続スペクトルは存在しない．レゾナンスがあれば，閉上半平面にしか存在しない．実のレゾナンスは固有値である．

これらの結果では，レゾナンスの存在およびその位置についてはわからない．そこで，ディラック作用素と同じ電磁場ポテンシャルをもつパウリ作用素と電場ポテンシャルの符号だけが反対であるパウリ作用素の2つのパウリ作用素を用意する．パウリ作用素は非相対論的な作用素であり，磁場が無い場合には，シュレーディンガー作用素となる．光速が十分大きい場合には，次のことを示すことができた．

1つのパウリ作用素の固有値の近くにディラック作用素のレゾナンスが存在して，光速を無限大にするとレゾナンスは固有値に収束する．もう1つのパウリ作用素のレゾナンス近くにディラック作用素のレゾナンスが存在して，光速を無限大にするとディラック作用素のレゾナンスはパウリ作用素のレゾナンスに収束する．ある広大な領域においては，ディラック作用素のレゾナンスはこれら以外存在しない．

この結果は，相対論的量子力学が，光速を無限大にする非相対論的極限では，非相対論的量子力学に移行するということに対応している．これらの結果を得るために，ディラック作用素とパウリ作用素の間に2種類の作用素（相対論的パウリ作用素と呼んでいる）を介在させた．そのため，副産物として相対論的パウリ作用素のスペクトル構造に関する結果も得ることが出来た．また，これらの結果は，もっと一般的な行列値ポテンシャルでも成り立つことを示した．

この研究を磁場ポテンシャルが非有界な場合に拡張することが次の目標である

(2) 山田修宣（連携研究者）は他の共同研究者とともに，質量を持たない場合のディラック作用素が零固有値を持たないためのポテンシャルに対する十分条件や質量がある場合に閾値が固有値にならないための十分条件を与えた (Documenta Mathematica (2015)).

(3) 田村英男（連携研究者）は，他の共同研究者とともに，十分離れた2つのソレノイド内の（外に漏れない）磁場による散乱により，2次元シュレーディンガー作用素がレゾナンスをもつことを示し，レゾナンスの位置についての詳しい結果を得た (Adv. Math.

(2014))．さらに，ソレノイドが3つの場合の結果を得た (Proc. Japan Acad.Ser. A Math. Sci.(2015))．これらの結果は，Aharonov-Bohm 効果がレゾナンスにどのような影響を与えるかを示した結果である．

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 4 件)

Hurbert Kalf, Takashi Okaji, Osanobu Yamada, The Dirac operator with mass $m_0 \geq 0$: Non-Existence of zero modes and of threshold eigenvalues, Documenta Mathematica **20** (2015), 37-64. (査読あり)

Hideo Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances for scattering by three solenoids, Proc. Japan Acad.Ser. A Math. Sci.**91** (2015), no.4,45-49. (査読あり)

Ivana Alexandrova, Tamura Hideo, Resonances in scattering by two magnetic fields at large separation and a complex scaling method, Adv. Math. **256** (2014),398-448. (査読あり)

Osanobu Yamada, A remark on the limiting absorption principle of Schrödinger operators with exploding potentials, Mem. Inst. Sci. Engrg. Ritsumeikan Univ.**72** (2013), 1-7. (査読なし)

〔学会発表〕(計 20 件)

伊藤 宏，調和振動子のハミルトニアンについて，第 21 回超局所解析と古典解析，2014 年 12 月 7 日，長崎市松藤プラザ「えきまえ」いきいきひろば（長崎県長崎市）

田村 英男，3 個のソレノイド磁場による散乱のレゾナンスと AB 効果，第 21 回超局所解析と古典解析，2014 年 12 月 7 日，長崎市松藤プラザ「えきまえ」いきいきひろば（長崎県長崎市）

野村祐司，ランダム磁場シュレーディンガー作用素について，第 21 回超局所解析と古典解析，2014 年 12 月 7 日，長崎市松藤プラザ「えきまえ」いきいきひろば（長崎県長崎市）

山田 修宣, Uniform resolvent estimates of Dirac operators, 第 21 回超局所解析と古典解析, 2014 年 12 月 6 日, 長崎市松藤プラザ「えきまえ」いきいきひろば (長崎県長崎市)

伊藤 宏, 遠方で発散するポテンシャルをもつ Dirac 作用素の非相対論的極限, 2014 年日本数学会秋季分科会函数解析分科会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学(広島県東広島市)

伊藤 宏, 遠方で発散するポテンシャルをもつ Dirac 作用素の非相対論的極限, 2014 年夏の作用素論シンポジウム, 2014 年 9 月 7 日, 長浜市勤労者福祉会館 (滋賀県長浜市)

山田 修宣, Uniform resolvent estimates of Dirac operators, 2014 年夏の作用素論シンポジウム, 2014 年 9 月 7 日, 長浜市勤労者福祉会館 (滋賀県長浜市)

田村 英男, 複数個のソレノイド磁場による散乱のレゾナンスにみる AB 効果, 作用素論セミナー, 2014 年 6 月 20 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

伊藤 宏, Dirac 作用素のレゾナンスについて, 2014 年松本作用素論セミナー, 2014 年 3 月 9 日, 東横イン松本駅前会議室 (長野県松本市)

田村 英男, 複数個のソレノイド磁場による散乱のレゾナンスにみる AB 効果 (I), (II), 2014 年松本作用素論セミナー, 2014 年 3 月 9 日東横イン松本駅前会議室 (長野県松本市)

野村 祐司, 離散シュレディンガー作用素のレゾナンスについて, 2014 年松本作用素論セミナー, 2014 年 3 月 9 日東横イン松本駅前会議室 (長野県松本市)

山田 修宣, 極限吸収原理の落穂拾い, 作用素論セミナー, 2014 年 1 月 31 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

伊藤 宏, On the spectrum of Dirac operators with a dilation analytic potential, The 20 th “Microlocal Analysis and Classical Analysis”, 2013 年 11 月 22 日, 京都大学理学研究科セミナーハウス (京都府京都市)

山田 修宣, 大鍛冶 隆司, Hubert Kalf, Spectral properties of two-body Dirac operators-A review of Okaji 's approach, The 20 th “Microlocal Analysis and Classical Analysis”, 2013 年 11 月 22 日,

京都大学理学研究科セミナーハウス (京都府京都市)

伊藤 宏, 遠方で発散するポテンシャルをもつ Dirac 作用素, 日本数学会秋季分科会函数解析分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学 (愛媛県松山市)

山田 修宣, 池部・斉藤の極限吸収法の応用に対する一注意, 2013 年 9 月 7 日, 2013 年夏の作用素論シンポジウム, 広島大学東千田キャンパス (広島県広島市)

伊藤 宏, Resonances of relativistic Hamiltonians, TAIWAN-JAPAN, Joint Conference on PDE and Analysis, 2012 年 12 月 27 日, 国立台湾大学 (台北市)

田村 英男, 磁場散乱のレゾナンスにみる AB 効果, スペクトル・散乱理論とその周辺, 2012 年 12 月 13 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

伊藤 宏, 相対論的ハミルトニアンについて, 第 19 回超局所解析と古典解析, 2012 年 11 月 24 日, かんぼの宿 北九州 (福岡県北九州市)

山田 修宣, Spectral problems of three-body Dirac operators on the Euclidean space, 第 19 回超局所解析と古典解析, 2012 年 11 月 24 日, かんぼの宿 北九州 (福岡県北九州市)

野村 祐司, 峯 拓矢, 上半平面上の周期的 Aharonov-Bohm 磁場をもつシュレディンガー作用素のランダウ準位, 日本数学会秋季総合分科会函数解析分科会, 2012 年 9 月 19 日, 九州大学伊都キャンパス (福岡県福岡市)

山田 修宣, Spectral problems about many-body Dirac operators mentioned by Dereziński (joint work with H. Kalf and T. Okaji), 2012 年夏の作用素論シンポジウム, 2012 年 9 月 9 日, 新潟大学駅南キャンパス (新潟県新潟市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 宏 (ITO Hiroshi)
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 90243005

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

山田 修宣 (YAMADA Osanobu)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：70066744

田村 英男 (TAMURA Hideo)
岡山大学・理学部・教授
研究者番号：30022734

野村 祐司 (NOMURA Yuji)
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：40282818

岩塚 明 (IWATSUKA Akira)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：40184890