様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：３２６１３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０１９３

研究課題名（和文）経路積分－時間分割近似法による経路空間上の解析の展開

研究課題名（英文）Path integrals - Expansion of analysis on path space by time slicing approximation

研究代表者
熊ノ郷　直人（KUMANOGO, NAOTO）

工学院大学・基礎・教養教育部門・教授

研究者番号：４０２９６７７８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：高階放物型の相空間経路積分が数学的に厳密な意味をもつ一般的な汎関数のクラスを与えた。このクラスに属する任意の汎関数に対して、相空間経路積分の時間分割近似法が、位置経路の終点と運動量経路の始点に関して広義一様収束する。この汎関数のクラスは和と積で閉じているため、経路積分可能な多くの汎関数を創ることができる。さらに、使用に際し注意を払う必要があるが、相空間経路積分と積分との順序交換、および、相空間経路積分と極限操作との順序交換が成立する。

研究成果の概要（英文）：We gave a general class of functionals for which the phase space path integrals of higher order parabolic type have a mathematically rigorous meaning. For any functional belonging to this class, the time slicing approximation of the phase space path integral, converges uniformly on compact subsets with respect to the endpoint of position paths and to the starting point of momentum paths. Because this class of functionals is closed under addition and multiplication, we can produce many functionals which are path integrable. Furthermore, though we need to pay attention for use, the interchange of the order of the phase space path integrals and some integrals, and the interchange of the order of the phase space path integrals and some limit operations, are valid.

研究分野：解析学基礎

キーワード：経路積分　関数方程式論　関数解析学　数理物理　擬微分作用素　フーリエ積分作用素　振動積分　確率解析

１．研究開始当初の背景

1948 年 R. P. Feynman はシュレディンガー方程式の基本解を経路積分の形で表現した。Feynman は経路積分をすべての経路に関する和であると主張し、有限次元積分の極限として説明した。この方法は現在、時間分割近似法と呼ばれている。さらに Feynman は、一般的な汎関数を振幅とする経路積分を考え、経路積分と汎関数微分からなる経路空間上の新しい解析学を提案し、ハミルトン形式で定式化されていた量子力学にラグランジュ形式による別の定式化を与えた。また一方で Feynman は相空間型（ハミルトン型）経路積分も提案している。

しかし 1960 年 R. H. Cameron は、経路積分の測度が数学的に存在しないことを証明した。数学においては、測度を用いると、積分の存在、２つの積分の順序交換、積分と極限の順序交換など、積分の性質が保証できる。しかし Cameron の結果は、経路積分において、こうした数学的議論が不可能であることを意味する。また、相空間型の場合、物理においては、位置と運動量を同時に定義できない不確定性原理があるため、相空間経路の物理的解釈は曖昧である。

ゆえに私の研究の全体構想は、測度の代わりに Feynman の最初のアイデアである時間分割近似法を用いて、経路積分の存在とその性質を数学的に証明し、経路積分と汎関数微分からなる経路空間上の新しい解析学を構成することである。

２．研究の目的

研究の全体構想は「時間分割近似法による経路空間上の新しい解析学の構成」である。これまで私は、擬微分作用素の理論で開発された計算方法をシュレディンガー方程式に対する経路積分の時間分割近似法に適用して、一般的な汎関数を振幅とする経路積分の理論を構成してきた。一方、数学において、擬微分作用素の理論はシュレディンガー方程式に限らず様々な偏微分方程式に適用できる一般理論であり、また最近、環状型やリー群型など対称性を元に新しい形の擬微分作用素の理論も展開されている。

本研究では、これまでの私の研究とは逆に、経路積分の時間分割近似法を、様々な偏微分方程式に対する擬微分作用素の理論に適用して、一般的な汎関数を振幅とする相空間経路積分の理論を構成する。厳密に言えば、相空間経路積分の時間分割近似法が広義一様収束するような一般的な汎関数のクラスを構成する。さらに、その相空間経路積分において、相空間経路積分とリーマン積分との順序交換定理や、相空間経路積分と極限との順序交換定理など、可能となる演算を数学的に明確化する。

また、これまでに私が定式化してきた経路積分の一般理論の整備と成果発表も同時に進める。これら多方面から時間分割近似法を見直すことで、時間分割近似法の開発に活かす。

３．研究の方法

(1) 相空間経路積分としての理論展開や偏微分方程式への応用例までを想定し、時間分割近似法を適用する擬微分作用素を選定した。実際に計算していくと、現在の計算テクニックでは偏微分方程式への応用例で制約が出る擬微分作用素もあることに気づいた。このため擬微分作用素の条件を変えて計算をやり直した。その結果、変数係数をもつ一般的な高階放物型方程式の擬微分作用素に適用できる計算方法を思いついた。

(2) 変数係数をもつ一般的な高階放物型方程式の擬微分作用素に対応する相空間型経路積分の時間分割近似法は、大きな次元の多重振動積分となる。

まず、熊ノ郷（準）－谷口の定理を参考にして、この多重振動積分を、定数の次元乗でコントロールする方法を開発した。

次に、この多重振動積分の主部と余りに分け、主部と余りを、次元によらない定数でコントロールする方法を開発した。特に高階放物型のため階数を下げる必要があり、多重表象の擬微分作用素の漸近展開を用いて、主部と余りに分けた。主部は、多重表象の漸近展開に経路の性質を適用して、次元によらない定数でコントロールした。余りは、藤原の大きな次元の停留位相法における剰余項の評価のアイデアを利用して、次元によらない定数でコントロールした。

さらに時間分割の幅がゼロに近づくとき、高階放物型方程式の擬微分作用素に対応する相空間経路積分の時間分割近似法の多重振動積分が位置経路の終点と運動量経路の始点に関し、広義一様収束するような汎関数の条件を求めた。

(3) 高階放物型方程式の擬微分作用素に対応する相空間経路積分において、相空間経路積分と時間に関する積分との順序交換定理、相空間経路積分と極限との順序交換定理、続いて、摂動展開を証明した。

変数係数の一般的な高階放物型方程式の基本解を相空間経路積分で表現する応用例を考える際に、(2)で求めた汎関数の条件は一般化しすぎたようで、積の演算に関して閉じなくなってしまったことに気づいた。このため、(2)で求めた汎関数の条件を強めて、汎関数のクラスが和や積の演算に関して閉じ、さらに、なるべく一般的な高階放物型方程式を容易に扱うことができるように汎関数のクラスを最終調整した。

４．研究成果

(1) 相空間経路積分の時間分割近似法は、シュレディンガー方程式や放物型方程式などの解の構成法の一つとして用いられてきた。

しかしながら、数学的には相空間経路積分に対応する測度は存在しない。また、物理的にも、位置と運動量を同時に測定できないという不確定性原理があり、相空間経路の物理的解釈は曖昧である。特に、作用素の収束で説明している文献があるが、作用素では「配位空間（ラグランジュ型）経路積分」と「相空間（ハミルトン型）経路積分」の区別ができないように思える。なぜ「相空間経路」と言えるのか？さらに物理学者 L. S. Schulman の本で指摘されているように、相空間経路積分を通常の積分だと思って形式的に式変形すると、誤った結論が導かれる例がある。なぜ「積分」と言えるのか？

こうした疑問から、変数係数の一般的な高階放物型方程式に対して、区分的に定数となる左連続な位置経路と区分的に定数となる右連続な運動量経路による時間分割近似法を用いて、一般的な汎関数を被積分汎関数とする相空間経路積分が存在する汎関数のクラスを与えた。数学的に厳密に言えば、このクラスに属する任意の汎関数を振幅とする相空間経路積分の時間分割近似法が、位置経路の終点と運動量経路の始点に関して広義一様収束する。

この汎関数のクラスは、不確定性原理に関わらないように一部の基本的な汎関数を排除しているが、多くの基本的な汎関数の例を含んでいる。特に、振幅とする汎関数が１の場合の相空間経路積分で、高階放物型方程式の基本解に対する擬微分作用素の表象を表すことができる。また、この汎関数のクラスは、和や積の演算に関して閉じている。このため、このクラスに属する基本的な汎関数の例に和や積の演算を適用することにより、相空間経路積分可能な多くの汎関数を創ることができる。

さらに、位置と運動量を同時に扱えない不確定性原理を避けるため使用する際には注意が必要であるが、相空間経路積分と時間に関する積分との順序交換定理、相空間経路積分と極限との順序交換定理、さらに摂動展開を証明した。

上述した疑問への私なりの答は、位置経路の終点と運動量経路の始点に関して収束するため、相空間経路積分を「相空間経路」と言っても良いであろう、さらに、一般的な汎関数に対して定義でき、しかも、積分に類似した性質を満たすため、相空間経路積分を「積分」と言っても良いであろうである。

特に、一般的な高階放物型方程式に対して、相空間経路積分の従来の結果は基本解の構成だけで、一般的な汎関数を被積分汎関数とした相空間経路積分を定義し、「積分」と類似した性質を証明した研究は、この研究が初めてである。

今後の展望として、高階放物型の相空間経路積分に対する時間分割近似法の多重振動積分を評価するために開発した多重表象の漸近展開の評価法を、他の形の擬微分作用素に適用したいと考えている。

(2) 経路積分の理論や時間分割近似法の計算テクニックを様々な観点から見直し、発展させるため、これまでに私が定式化してきたシュレディンガー方程式に対する折れ線経路や区分的古典経路を用いた時間分割近似法による（ラグランジュ型）経路積分の理論、シュレディンガー方程式に対する区分的陪特性経路や区分的定数経路を用いた時間分割近似法による相空間（ハミルトン型）経路積分の理論、熱方程式に対する折れ線経路を用いた時間分割近似法による（ラグランジュ型）経路積分の理論の成果発表を行った。
さらに、多方面から意見を聞き、経路積分の理論や時間分割近似法の計算テクニックを開発するため、また、研究成果を広く発信するため、国内外の経路積分や超局所解析の研究者を集め、以下の研究集会を企画した。

① 研究集会「Microlocal Analysis, Differential Equations and Related Topics」、東京大学、研究代表者：熊ノ郷直人、副代表者：片岡清臣、山崎晋、2012年8月2日～3日

② 共同研究「Introductory Workshop on Path Integrals and Pseudo Differential Operators」、京都大学数理解析研究所、研究代表者：熊ノ郷直人、副代表者：千葉康生、2014年10月7日～10日
http://www.ns.kogakuin.ac.jp/~wwa1046/workshop2014-10

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Naoto Kumano-go, A. S. Vasudeva Murthy、Phase space Feynman path integrals of higher order parabolic type with general functional as integrand、Bulletin des Sciences Mathematiques、査読有、印刷中、
DOI:10.1016/j.bulsci.2014.11.001

② 熊ノ郷　直人、Phase space Feynman path integrals as analysis on path space、数理解析研究所講究録、査読無、1902巻、2014、pp. 1-20
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1902-01.pdf

③ Naoto Kumano-go、Phase space path integrals as analysis on path space、数理解析研究所講究録、査読無、1861巻、2013、pp.83-99、

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1861-09.pdf

④ Naoto Kumano-go、Daisuke Fujiwara、Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations、RIMS Kokyuroku Bessatsu、査読有、B37 巻、2013、pp.113-136

⑤ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals – calculation examples via piecewise bicharacteristic paths、数理解析研究所講究録、査読無、1797 巻、2012、pp.167-186、http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1797-08.pdf

⑥ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals – as analysis on path space via piecewise constant paths、数理解析研究所講究録、査読無、1797 巻、2012、pp.187-203、http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1797-09.pdf

〔学会発表〕（計 13 件）

① Naoto Kumano-go、Path Integrals for Gaussian Processes as analysis on path space、Workshop "Geometric and Singular Analysis"、2015 年 2 月 10 日、The University of Potsdam、Germany

② 熊ノ郷 直人、Phase space Feynman path integrals as analysis on path space、Workshop on Analysis in Kagurazaka 2015、2015 年 1 月 24 日、東京理科大学

③ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals as analysis on path space、Microlocal Day #5、2015 年 1 月 16 日、Imperial College London、UK

④ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals of higher order parabolic type、RIMS Joint Research "Introductory Workshop on Path Integrals and Pseudo-Differential Operators"、2014 年 10 月 10 日、京都大学数理解析研究所

⑤ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals of m-th order parabolic type for general functionals、Workshop "Geometric and Singular Analysis"、2014 年 3 月 25 日、The University of Potsdam, Germany

⑥ 熊ノ郷 直人、Phase space Feynman path integrals as analysis on path space、RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」、2013 年 12 月 11 日、京都大学数理解析研究所

⑦ 熊ノ郷 直人、経路積分-時間分割法による経路空間上の解析、調和解析駒場セミナー、2013 年 10 月 12 日、東京大学

⑧ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives、Lecture、2013 年 8 月 5 日、TIFR Centre For Applicable Mathematics、Bangalore、India

⑨ 熊ノ郷 直人、相空間の経路積分－フーリエ積分作用素の　多重積の応用として、南大阪応用数学セミナー、2013 年 2 月 2 日、大阪府立大学

⑩ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation、Special Session on Interplay Between Feynman Operational Calculus, Wiener and Feynman Integrals, Physics, and Analysis on Wiener Space, AMS Joint Mathematics Meetings、2013 年 1 月 9 日、San Diego, USA

⑪ Naoto Kumano-go、Phase space path integral as analysis on path space、RIMS 研究集会「超局所解析と漸近解析の最近の進展」、2012 年 10 月 24 日、京都大学数理解析研究所

⑫ 熊ノ郷直人、相空間の経路積分－経路空間上の解析として－、日本数学会秋季総合分科会、函数方程式論特別講演、2012 年 9 月 19 日、九州大学

⑬ Naoto Kumano-go、Phase space Feynman path integrals with smooth functional derivatives by time slicing approximation、研究集会「Microlocal Analysis, Differential Equations and Related Topics」、2012 年 8 月 2 日、東京大学

〔図書〕（計 1 件）

① 編集：熊ノ郷 直人、山崎 晋、Byoung Soo Kim、千葉 康生、数理解析研究所講究録 1797「Introductory Workshop on Feynman Path Integral and Microlocal Analysis」、京都大学数理解析研究所、2012 年 6 月、http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1797.html

６．研究組織
(1)研究代表者
熊ノ郷　直人（KUMANOGO NAOTO）
工学院大学・基礎・教養教育部門・教授
研究者番号：40296778

(2)研究分担者
なし