

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540199

研究課題名(和文)幾何学的手法を用いた解析的な不等式の先鋭化

研究課題名(英文)Refinement of analytic inequalities with geometric approach

研究代表者

渡邊 宏太郎(Watanabe, Kohtarō)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工・その他部局等・教授)

研究者番号：30546057

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：計画の通り微分幾何学的手法の導入によるGidas-Ni-Nirenberg理論の拡張およびLyapunov型不等式の精密化とp-ラプラシアンを含む半分線形方程式に対する応用の研究を行った。

前者では、(1) Henon方程式とよばれる方程式の球対称でない解(mモード解)の構成およびその消滅についての応用、(2) n次元球面上のBrezis-Nirenberg問題の解の一意性の問題への応用を行った。これらの結果を3編の論文にまとめた。

後者では、Lyapunov不等式の精密化に必要なSobolev不等式の研究も含め、13編の論文にまとめた。

研究成果の概要(英文)：According to the plan of this study, we have proceeded the following two objects: the extension of Gidas-Ni-Nirenberg's theory by the geometric approach, refinements of Lyapunov-type inequalities and their applications to half-linear equations which include p-Laplacian.

In the former, we have studied (1) Henon equation, especially the construction problem of non-radially symmetric solutions (m-mode solutions) and their degeneracy to radially symmetric solutions. (2) Brezis-Nirenberg problem on n-dimensional sphere and the uniqueness of the solution. These results are published in three papers.

In the latter, we have studied Sobolev inequalities which are necessary for the refinements of Lyapunov-type inequalities. These results are published in 13 papers.

研究分野：函数方程式論

キーワード：非線形微分方程式 球対称性 解の一意性

## 1. 研究開始当初の背景

半線形楕円型方程式の正值解についてある種の対称性を得る方法として Gidas-Ni-Nirenberg による Moving-Plane 法がよく知られている。方程式を考える領域が  $n$  次元開球  $D$  であれば、解の球対称性を示すことができる。半線形楕円型方程式として次の型のものを考える。

$$\Delta u(x) + f(|x|, u(x)) = 0, x \in D$$

$$u(x) = 0, x \in \partial D$$

この問題に対して、内藤雄基氏と鈴木貴氏は  $D$  にポアンカレ計量を仮定することにより非線形項  $f$  の減少性の仮定を従来より緩和した。申請者はこの方法に興味を持ち、一般の楕円幾何計量や双曲幾何計量を  $D$  に導入した場合、どのような拡張がなされるかという問題意識をもつこととなった。これが、本研究の動機となっている。研究期間中、球面上の Brezis-Nirenberg 問題の正值球対称解の一意性についての問題が方法的には類似した点があることを知り、この方面の研究にも一歩を踏み出すことができた。

本計画のもう1つの柱として、 $p$ -ラプラス作用素を含む半線形方程式の非自明解の存在のための必要条件の研究があった。この目的のためには、精密化されたソボレフ不等式の導出が必要となる。ソボレフ不等式の精密化のためには、関数の対称化の方法が必要であり、この点において半線形楕円型方程式の解の対称性の研究と共通する要素がある。互いに応用できる部分が研究期間中に生じるのではないかということも、開始当初念頭に置いて研究に着手した。

## 2. 研究の目的

幾何学的手法の導入により関数対称化の方法を発展させることが本研究の目的である。具体的には Gidas-Ni-Nirenberg の理論、すなわち、半線形楕円型微分方程式の正值解の球対称性の導出につきその適用範囲を拡げること、またソボレフ不等式を精密化し、 $p$ -ラプラス作用素を含む半線形方程式の解の存在のための必要条件を求めることの2点を研究目的とした。前者では従来非線形項に仮定されていたある種の単調性を緩和できる場合があり、後者ではリャプノフ型不等式として得られていた評価を最良の評価に改善することができる。いずれの場合も、幾何学的考察に基づく新たな関数の対称化を行うことが鍵となっている。以下、各項目について、詳しく述べる。

(1) 1. Gidas-Ni-Nirenberg 理論に関する拡張について：内藤雄基氏と鈴木貴氏によって見出された領域に(オリジナルなユークリッド計量とは異なる)リーマン計量を導入し、非線形項に対する条件を緩和する方法についての研究である。この方法の応用として、Henon 方程式とよばれる方程式の  $m$  モード解(原点を中心とする  $2\pi/m$  の回転で不変な解)が存在する  $m$  についての上限

の評価を得ることができた。この部分は、塩路直樹氏との共同研究により進めた。

(2)  $p$ -ラプラス作用素を含む半線形方程式の非自明解の存在のための必要条件の研究について：研究開始当初  $p$ -ラプラシアンを含む方程式の解の存在のための必要条件の研究が J. Pinasco 氏らによってなされていた。申請者は、そのような必要条件是ソボレフ不等式の最良定数で記述した方が、通常とられている方法より見通しがよいらろうと考えていた。これについて、様々な  $p$ -ラプラス作用素を含む半線形方程式について、確かめることが具体的目標であった。この部分は、亀高惟倫氏、永井敦氏、武村一雄氏、山岸弘幸氏との共同研究により進めた。

## 3. 研究の方法

研究の目的で述べた項目(1)については、塩路直樹氏とのゼミを通じて進展させた。ペンタプレットを用いてのゼミもそのうちかなりの回数を占めた。ペンタプレットを用いてのゼミで問題となるのは、回線の接続状況である。疑似ホワイトボードを用いて数式、図を書きゼミを行ったが、まれに回線の状況が悪くレスポンスがなかなか返ってこない場合があった。また、音声も聞きにくくなる状況があった。遠隔ゼミは、近いテーマを研究している者どうしにとって良いツールであると感じたが、帯域の割り当てなどの問題があり、インターネットサイトによってその使用感はばらつきがあるのではなかろうか。

項目(2)については、同時に集まる状況を作り出すことが難しかったため、進展状況を電子メールで連絡する機会が多かった。学会開催時を利用し、全員でゼミを行うこともあった。この研究では、グリーン関数の構成等に数式処理を多用した。グリーン関数の対角成分の挙動をシミュレートすることで証明のヒントを与えてくれる場合があったためである。項目(1)の研究でも後半は、一般化されたポッホザエフ関数の挙動を調べる場面が多くなり、数式処理ソフトウェアの活用を行う状況が多くなった。

## 4. 研究成果

研究の目的で述べた項目(1)については、内藤氏-鈴木氏とはことなるリーマン計量を領域に導入し、非線形項に対する条件を緩和できるいくつかの場合を得た。この方法では、超平面に関する対称点を考えるのではなく、測地面に関する対称点を考える。そのため、対称点を得るための具体的な計算は難しい部分がある。この項目についての成果を2編の学術論文にまとめることができた(雑誌論文⑤、⑥)。そのうち1編は、研究の目的で述べたように Henon 方程式への応用である。また、関連研究として、球面や双曲空間での半線形方程式の解構造の研究を開始することができた。具体的には、ポッホザエフ関数を用いた解の一意性の結果を得ることがで

きた。この方法が球面や双曲空間での半線形方程式の解析に有効な手段であることが徐々にわかって来ている状況である。この結果の一部は雑誌論文⑥にまとめることができた。

項目(2)については、雑誌文献①-③, ⑥-⑩が該当する。ソボレフ不等式の精密化を行い、それを利用してリャプノフ不等式の改良を行った。このことにより、従来得られていたリャプノフ不等式より精密な不等式を得ることができた。特に  $p=2$  の場合には、リャプノフ不等式にリーマンゼータ関数が現れることを示し、さらにそれが最良の評価である(それ以上改善できない)ことを示した。証明自体は単純であるが、このようなことは従来指摘されておらず、視点として新たな結果なのではなかろうか。

また、(1)と(2)を結ぶような事項: 2次元球面上の  $L^p$  弾性曲線の研究を本研究期間中に開始することができた。これについては、日本数学会 2015 年年会で一部の結果を報告した(雑誌文献④は関連する結果である)。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件)

- ① K. Takemura, A. Nagai, Y. Kametaka, K. Watanabe, H. Yamagishi, Sobolev inequality of free boundary value problem for  $(-1)^M(d/dx)^{(2M)}$ , J. of Inequality and Appl., 査読有, 2015, 2015, pp.1-20
- ② H. Yamagishi, K. Watanabe, The best constant of  $L^p$  Sobolev inequality including  $j$ -th derivative corresponding to periodic and Neumann boundary value problem for  $(-1)^M(d/dx)^{(2M)}$ , Tokyo J. of Math., 査読有, 37, 2014, pp.485-501
- ③ H. Yamagishi, K. Watanabe, Y. Kametaka, The best constant of three kinds of the discrete Sobolev inequalities on the complete graph, Kodai Math. J., 査読有, 37, 2014, pp.383-395
- ④ K. Watanabe, Planar  $p$ -elastic curves and related generalized complete elliptic integrals, Kodai Math. J., 査読有, 37, 2014, pp.453-474
- ⑤ N. Shioji, K. Watanabe, Radial symmetry of  $n$ -mode positive solutions for semilinear elliptic equations in a disc and its applications to the Henon equation, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 査読有, 43, 2014, pp.269-285
- ⑥ H. Yamagishi, K. Watanabe, Y. Kametaka, The best constant of  $L^p$  Sobolev inequality corresponding to Dirichlet-Neumann boundary value problem, Math. J. of Okayama univ., 査読有, 56, 2014, pp.145-155

- ⑦ N. Shioji, K. Watanabe, A generalized Pohozaev identity and uniqueness of positive radial solutions of  $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p=0$ , J. Differential Equation, 査読有, 255, 2013, pp.4448-4475
- ⑧ H. Yamagishi, Y. Kametaka, A. Nagai, K. Watanabe, K. Takemura, The best estimation corresponding to continuous model of Thomson cable, JSIAM Letters, 査読有, 5, 2013, pp.53-56
- ⑨ H. Yamagishi, Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai, K. Takemura, The best constant of three kinds of discrete Sobolev inequalities on a regular polyhedron, Tokyo J. of Math., 査読有, 36, 2013, pp.253-268
- ⑩ H. Yamagishi, Y. Kametaka, A. Nagai, K. Watanabe, K. Takemura, Complete low-cut filter and the best constant of Sobolev inequality, JSIAM Letters, 査読有, 5, 2013, pp.33-36
- ⑪ Y. Kametaka, K. Takemura, H. Yamagishi, A. Nagai, K. Watanabe, Positivity and hierarchical structure of 16 Green functions corresponding to a bending problem of a beam, Saitama Mathematical J., 査読有, 29, 2012, pp.1-24
- ⑫ Y. Oshime, H. Yamagishi, K. Watanabe, The best constant of Sobolev inequality corresponding to Neumann boundary value problem for  $(-1)^M(d/dx)^{(2M)}$ , Hiroshima Mathematical J., 査読有, 42, 2012, pp.293-299
- ⑬ K. Watanabe, K. Takemura, Y. Kametaka, A. Nagai, H. Yamagishi, Lyapunov type inequalities for  $2M$ th order equations under clamped free boundary conditions, J. of Inequality and Appl., 査読有, 2012, 2012, pp.1-8
- ⑭ K. Takemura, Y. Kametaka, K. Watanabe, A. Nagai, H. Yamagishi, Sobolev type inequalities of time-periodic boundary value problems for Heaviside and Thomson cables, Boundary Value Problems, 査読有, 2012, 2012, pp.1-15
- ⑮ K. Watanabe, Lyapunov type inequality for the equation including 1-dim  $p$ -Laplacian, Mathematical Inequalities & Applications (MIA), 査読有, 15, 2012, pp.657-662
- ⑯ H. Yamagishi, A. Nagai, K. Watanabe, K. Takemura, Y. Kametaka, The best constant of discrete Sobolev inequality corresponding to a bending problem of a string, Kumamoto J. of Mathematics, 査読有, 25, 2012, pp.1-15

[学会発表] (計 4 件)

- ① 山岸 弘幸, 渡辺 宏太郎, 押目 頼昌,  $(-1)^M(d/dx)^{(2M)}$  の周期とノイマン境界条件に対応する  $L^p$  ソボレフ不等式の最良定数, 日本数学会, 2015年3月21日, 明治大学
- ② 渡辺 宏太郎, 塩路 直樹, 2次元球面上の

$L^p$  弾性閉曲線と flat-core 解の存在について、日本数学会、2015 年 3 月 21 日、明治大学

- ③ 塩路 直樹, 渡辺 宏太郎, 楕円型方程式  $\Delta u + g(r)u + h(r)u^p = 0$  の正值球対称解の一意性とその応用について、2013 年 3 月 20 日、京都大学
- ④ 塩路 直樹, 渡辺 宏太郎, 円板上の楕円型方程式の  $n$  モード正值解の球対称性とその Henon 方程式への応用、2012 年 9 月 18 日、九州大学

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等  
特になし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

渡邊 宏太郎 (WATANABE KOHTARO)  
防衛大学校・情報工学科・教授  
研究者番号：30546057

### (2) 研究分担者

亀高 惟倫 (KAMETAKA YOSHINORI)  
大阪大学・名誉教授  
研究者番号：00047218

塩路 直樹 (SHIOJI NAOKI)  
横浜国立大学・工学研究院・教授  
研究者番号：50215943

### (3) 連携研究者