

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 28 日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540202

研究課題名(和文)波動方程式と調和解析

研究課題名(英文)wave equations and harmonic analysis

研究代表者

町原 秀二 (MACHIHARA, Shuji)

埼玉大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：20346373

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：以下三つの研究課題に取り組んだ。(1) 非線形波動方程式の解の存在定理、(2) 線形シュレディンガー方程式の解の制限定理、(3) 実解析空間論。これらそれぞれについて。(1) ディラック・クライン・ゴールドン方程式系やチャーン・サイモンズ方程式系を空間一次元で取り扱い、初期値問題の適切性及び非適切性を得た。条件によっては一部、適切性及び非適切性の完全分類に成功した。また半相対論的波動方程式の初期値問題適切性を得た。(2) トレース定理の最良定数を与える関数のクラスを決定した。(3) ハーディの不等式に関する既存の結果より詳細な成立および不成立の条件を得た。

研究成果の概要(英文)：The aims for our research are the following three studies: (1) Well-posedness and ill-posedness results for the Cauchy problem of some nonlinear wave equations. (2) The restriction theorems for the solutions for Schrodinger equations. (3) Hardy's inequalities, especially with the critical exponents.

For those aims, our results are the followings. (1) We studied the Cauchy problem for the Dirac-klein-Gordon equation, Chern-Simons-Dirac equation and the nonlinear half wave equations. We obtained some well-posed results and ill-posed results. Especially for Chern-Simons-Dirac equation, we succeed to define the class of well-posed or ill-posed results in Sobolev spaces. (2) We found the class of extremizers for the trace theorem on the sphere. (3) We proved the Hardy inequality holds with some condition of index and fails with others.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：非線形波動方程式 初期値問題の適切性 トレース定理 ハーディの不等式

1. 研究開始当初の背景

申請書には以下の3つの研究課題を掲げた。

- (1) 非線形波動方程式の解の存在定理
 - (2) 線形シュレディンガー方程式の制限定理
 - (3) 実解析空間論
- よってこれらのそれぞれについて記す。

(1) 非線形波動方程式の解の存在定理、ひいては初期値問題の適切性に関する研究である。初期値問題が適切であるとは解の存在、解の一意性そして解の初期値への連続依存性が数学的証明で保証できたときをいう。**Bourgain** のフーリエ制限ノルムを用いた手法で膨大な数の関連論文があるがまだまだ興味深い問題は残っている。研究代表者は特にディラック・クライン・ゴルドン方程式系やチャーン・サイモンズ方程式系を取り扱った。また近年半相対論的方程式の研究の結果が幾つか報告されていた。

(2) 調和解析のフーリエ制限定理の問題に関するものである。不等式の成立・不成立を証明する。不等式の成立条件の指数の分類が最終決着となる。つまり不等式成立と不成立の条件を完全に解決することができればその問題は終了する。その他に不等式の最良定数の問題などもある。

(3) ハーディの不等式を研究した。不等式成立の臨界指数を求める研究は未だ重要度が高く近年でも多数の論文が発表されている。

2. 研究の目的

(1) ディラック・クライン・ゴルドン方程式系やチャーン・サイモンズ方程式系を空間一次元で取り扱う。初期値問題の適切性を示す。または非適切性を示す。解の関数を捕まえる関数空間には標準的なソボレフ空間を用いる。関数の滑らかさを表すソボレフ指数の低減化が具体的な目的・目標となる。既存の結果より低いソボレフ指数での解決を目指す。また非線形半相対論的方程式の初期値問題についても適切性を与える。

(2) トレース定理における最良定数およびその定数を与える関数の存在を研究する。また必要十分の最良定数を与える関数のクラスを決定することが最終目標である。

(3) ハーディの不等式で臨界指数での成立不成立を調べる。幾つかの不等式に関する判定方法が存在するが、その手法が適応できない問題がある。その場合は判定方法の洗練化、精密化を行う。汎用性の高い判定方法の結果が求まればそれ自体が意義のある研究結果となる。また他のタイプの不等式への応用を考える。

3. 研究の方法

既存する定理の証明を精査する。微分方程式初期値問題の適切性と非適切性、不等式の指数の範囲における成立と不成立の研究は互いに異なる研究のように見えるが、同時に行うことでそれぞれの研究のヒントを得ることがある。またたびたび旅費を用いて国内外に存在する研究者を訪れ研究打合せを行った。また国内外の研究集会にも多数参加した。

4. 研究成果

(1) Nikolaos Bournaveas 氏、Timothy Candy 氏との共同研究により Chern-Simons-Dirac 方程式にクーロンゲージを課した初期値問題の適切性を与えた。同方程式の物理的意味を有する空間2次元での取り扱いである。また数学的な技術としては方程式の持つ零形式と呼ばれる特別な構造を利用することなく、Klainerman-Tataru の双線形型 Strichartz 評価を上手く運用したところが特徴的である。

小澤徹氏、権田拓弥氏との共同研究で時間変数係数の付いた非線形シュレディンガー方程式の適切性を求めた。シュレディンガー方程式の主要部つまり線形部分に時間変数係数の付いた方程式を変数変換を行うことにより定数係数の線形シュレディンガー方程式に時間変数係数がついた非線形項をもつ方程式に書き換えて取り扱った。標準的なノルムのルベグノルムに加え、時間変数に対するローレンツノルムを併用して解決を見た。半相対論的方程式の解の存在定理に関する結果を得た。早稲田大学の小澤徹氏、藤原和将氏との共同研究である。まず単独の方程式に対して解の存在と一意性、また初期値への連続依存性を示した。またこのときに初期値そしてそれ故に解の正則度が低い状況で結果を得ることを目標としていた。具体的にはソボレフ空間の微分回数を表す指数の低減化が目標である。今回これを既存の他の研究者が求めたものより低い指数で結果を得ることができたことが特徴である。また次に半相対論的方程式のシステムにおける結果を得た。ここでは電荷保存のクラスにおける保存量を求め時間大域解まで求めることに成功した。これら結果に対し3つの論文を出版することができた。

チャーン・サイモンズ方程式の初期値問題の適切性と非適切性の結果を与えた。信州大学の岡本葵氏との共同研究である。非適切に関しては具体的には初期値への連続依存性が成立しないための初期値そしてそれに対応する解の関数列を構成した。チャーン・サイモンズ方程式が連立方程式のため解の存在するソボレフ空間の指数が複数あるが、適切性が確認されている指数以外での調査となった。それぞれの指数の条件に対して異なる関数列を用意し結論を与えた。このことは同時に適切性の結果の最適性を与えることとなり研究の重要度が高い。

ディラック・クライン・ゴールドン方程式系やチャーン・サイモンズ方程式系を空間一次元で取り扱い、初期値問題の適切性および非適切性を得た。条件によっては一部、適切性と非適切性の完全分類に成功した。また半相対論的波動方程式の初期値問題適切性を得た。

(2) トレース定理の最良定数を与える関数のクラスを決定した。

(3) ハーディの不等式に関する既存の結果より詳細な成立および不成立の条件を得た。また定義域を球に制限した場合に結果を得た。早稲田大学の小澤徹氏と金沢大学の和田出秀光氏との共同研究である。古典的ハーディの不等式が臨界指数において破綻することは知られており、そこに対数関数を付加し不等式の回復を論じた。結果的に不等式を表現する指数が複数個になったが不等式成立と不成立の分類分けに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

以下 14 件すべて査読あり

1. Ozawa, Tohru and Machihara, Shuji and Fujiwara, Kazumasa, Remark on a semirelativistic equation in the energy space, Discrete Contin. Dyn. Syst., Dynamical systems, differential equations and applications. 10th AIMS Conference. Suppl., (2015), 473--478.
2. Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru and Wadade, Hidemitsu, Scaling invariant Hardy inequalities of multiple logarithmic type on the whole space, J. Inequal. Appl., (2015), 2015:281.
3. Fujiwara, Kazumasa and Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru, On a system of semirelativistic equations in the energy space, Commun. Pure Appl. Anal., 14, (2015), 1343-1355.
4. Fujiwara, Kazumasa and Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru, Well-posedness for the Cauchy problem for a system of semirelativistic equations, Comm. Math. Phys., 338, (2015), 367-391.
5. Machihara, Shuji and Okamoto, Mamoru, Ill-posedness of the Cauchy problem for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension, J. Differential Equations, 258, (2015), 1356-1394.
6. Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru and Wadade, Hidemitsu, On the Hardy type inequality in critical Sobolev-Lorentz spaces, Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B49, (2014), 103-118.
7. Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru and Wadade, Hidemitsu, Notes on the paper entitled Generalizations of the logarithmic Hardy inequality in critical Sobolev-Lorentz spaces Journal of Inequalities and Applications, (2014), 2014:253, 2.
8. Gonda, Takuya and Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru, On the semilinear Schrödinger equation with time dependent coefficients, Mathematische Nachrichten, (2014), 1986-2001.
9. Bournaveas, Nikolaos and Candy, Timothy and Machihara, Shuji, A note on the Chern-Simons-Dirac equations in the Coulomb gauge, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, (2014), 2693-2701.
10. Machihara, Shuji, Maximal operators associated to the wave equation for radial data in $\mathbb{R}^{\{3+1\}}$, Saitama Mathematical Journal, (2013), 15-25.
11. Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru and Wadade, Hidemitsu, Hardy type inequalities on balls, The Tohoku Mathematical Journal. Second Series, (2013), 321-330.
12. Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru and Wadade, Hidemitsu, Generalizations of the logarithmic Hardy inequality in critical Sobolev-Lorentz spaces, Journal of Inequalities and Applications, (2013), 2013:381, 14.
13. Machihara, Shuji and Ozawa, Tohru, Some inequalities related to the Lorentz spaces, Hokkaido Mathematical Journal, (2013), 247-267.
14. Bournaveas, Nikolaos and Candy, Timothy and Machihara, Shuji, Local and global well posedness for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension, Differential and Integral Equations. An International Journal for Theory & Applications, (2012), 699-718.

〔学会発表〕（計 6 件）

代表的なものとして平成 27 年度のものを記す。

1. 2016 年 1 月 18 日、町原秀二、名古屋大学（愛知県名古屋市）、The Cauchy problem for the Chern-Simons-Dirac equation in one spatial dimension、名古屋微分方程式セミナー
2. 2015 年 11 月 28 日、町原秀二、大阪市立大学（大阪府大阪市）、空間 1 次元 Dirac-Klein-Gordon 方程式系の初期値問題、南大阪応用数学セミナー
3. 2015 年 11 月 14 日、町原秀二、東京大学（東京都目黒区）、空間 1 次元 Chern-Simons-Dirac 方程式系の初期値問題の非適切性、調和解析駒場セミナー
4. 2015 年 11 月 7 日、東京理科大学（東京都新宿区）、Machihara, Shuji、Ill-posedness for the Cauchy problem of the Dirac-Klein-Gordon system in one dimension、Critical problems in nonlinear evolution equations
5. 2015 年 8 月 7 日、マカオ（中国）、Machihara, Shuji、Ill-posed results for the 1d Dirac-Klein-Gordon system、10th International ISAAC Congress
6. 2015 年 7 月 27 日、エジンバラ（英国）、Machihara, Shuji、Well-posed and Ill-posed results for the 1d Dirac-Klein-Gordon system、Harmonic Analysis and Partial Differential Equations(ICMS)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

町原 秀二 (MACHIHARA, Shuji)
埼玉大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：20346373