

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540204

研究課題名(和文) 超離散可積分系の統一的研究法へ

研究課題名(英文) Towards a unified research method for ultradiscrete integrable systems

研究代表者

WILLOX Ralph (Wilcox, Ralph)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：20361610

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：従属変数を含めて、すべての変数が離散的な値をとる「超離散可積分系」という特殊な離散的力学系を研究し、それらに適用できる新しい解法を発見した。

特に、厳密解が知られていない「超離散sine-Gordon方程式」という方程式を整数上で解くことに成功し、有名なKdV方程式の超離散版における初期値データに組合せ論的な解釈を加えることができた。

さらに、超離散化前の段階における可積分系に対しては、高次元の離散可積分系の新しい構築法を開発し、低次元の離散的力学系の可積分性を見極めるための新しい判定法を提唱した。

研究成果の概要(英文)：Studying so-called "ultradiscrete integrable systems" - which are special discrete dynamical systems in which all the variables, including the dependent ones, only take discrete values - I discovered an entirely new method for solving such systems.

In particular, this enabled me to solve the so-called "ultradiscrete sine-Gordon equation" for which no explicit solutions are known, over the set of the integers. It also proved possible to attach a combinatorial interpretation to data that appear in the initial value problem for the ultradiscrete version of the famous KdV equation.

Furthermore, concerning integrable systems in the stage before they are turned into ultradiscrete systems, I developed a novel method for constructing higher-dimensional discrete integrable systems and I proposed a novel criterion for deciding on the integrability of lower dimensional discrete dynamical systems.

研究分野：数物科学・数学

キーワード：可積分系 離散可積分系 超離散可積分系 セルオートマトン

## 1. 研究開始当初の背景

セルオートマトンの主な数学的な役割は長い間複雑系の記述にあったが、1990年にソリトンの相互作用を示すセルオートマトン [時弘 2010] が発見されて以来、驚くべき進展が次々に起こった。特に、それらの「ソリトン・セルオートマトン」が「超離散極限」という特別な極限操作によって、古典可積分系と関係することが明らかになり、セルオートマトンにおけるソリトンが、多くの場合には、離散ソリトン系の厳密解からその極限で得られることが分かった。

さらに、ソリトン・セルオートマトンの典型である「箱玉系」が [時弘 2010] 可解な格子模型の「crystal limit」と呼ばれる極限操作で特殊な（量子力学における）可積分系に対応する事実も明らかになり、その結果、箱玉系、または一般の超離散可積分系は、古典可積分系と量子可積分系という2つの異なる世界の間には架かる橋として活発に研究されてきた。

この驚くべき展開の切っ掛けとなったのは、高橋・薩摩のソリトン・セルオートマトン [Takahashi, Satsuma 1990] の時間発展を定める「超離散 KdV」方程式である。この方程式は有名な（連続の）KdV 方程式の離散化と超離散極限により、 $\max$  と  $+$  という2つの演算子しか認めない「 $(\max, +)$ 代数」上で表現できる区分的線形方程式である。一般には、 $(\max, +)$ 代数における方程式系を「超離散系」という。高橋・薩摩のソリトン・セルオートマトンの時間発展は、超離散 KdV 方程式の解が  $\{0,1\}$  集合上の値しかとらないような制限から得られ、その系に対する初期値問題は、まず周期的境界条件の下で、そしてその後、無限の格子上で様々な組合せ論的な手法で解かれた。なお、2010年には、古典可積分系における逆散乱変換と類似している手法により [Wilcox et al. 2010]、無限の格子上の超離散 KdV 方程式を、一般的に、実数全体上で解くことができ、この新しい解法と既知の組合せ論的な手法との関係を解明することが重要となった。

一方、セルオートマトンのソリトン解が必ずしも適切な離散ソリトン系の解から極限操作で得られるとは限らない。実は、このような手続きが困難である場合も多く、適切な解が見つからない場合もある。例えば、有名な可積分系である sine-Gordon 方程式の離散版から超離散極限として得られるセルオートマトンには、ソリトンの分裂と融合のような非自明な相互作用を示す解が存在することは約15年前に、コンピュータ・シミュレーションによって示された。けれども、離散 sine-Gordon 方程式のソリトン解には同じような現象が無く、そのソリトン解が極限において自明な解しか与えないことも知ら

れ、超離散 sine-Gordon 方程式のソリトンの由来は、長年、とても有名な難問であった。

## 2. 研究の目的

本研究の主な目的は、超離散可積分系の研究に利用できる組み合わせ論的手法、及び古典可積分系の研究で重要な役割をもつ逆散乱法に類似した  $(\max, +)$  代数においても適用できる手法を開発し、超離散可積分系を連続系や離散系の数理に頼らずに、直接に超離散系のレベルで考察することである。このような超離散系における様々な分野の関連づけと統一化により、超離散可積分系がもつ特別な数学的構造を解明し、その研究に新しい道を開くことが1つの大きな目的であった。

特に、[Wilcox et al. 2010]で報告した超離散 KdV 方程式の解法における波動関数の固有値と正規化係数などの「散乱データ」と呼ばれる、時間発展に対して不変である情報と、既知の組合せ論的研究法で利用されている不変量との関係を解明し、さらに、有効な解法がまだ知られていない超離散可積分系、例えば超離散 sine-Gordon 方程式の場合にも適用できる新しい数学的道具を開発することが具体的な目標であった。

さらに、既知のソリトン・セルオートマトンと異なる性質を持つ超離散可積分系を構築することが長期的な目標である。そのためには、普段と違う対称性を持つ離散可積分系が系統的に構築できるような手法の開発、または QRT 写像や離散パルヴェ方程式などの低次元可積分系の性質を考察することも本研究の1つの目的にした。

## 3. 研究の方法

本研究課題の最初の目的を達成するためには、勿論、以前に開発した超離散的逆散乱法及び、ヤング図形に対する古典的な組合せ論的手法を用いたが、超離散 sine-Gordon 方程式を解くためには、自ら完全に新しいテクニックを開発する必要があった。その結果、「oiston」という新しい数学的概念の導入により、方程式が定める時間発展の記号力学的な書き換えに基づき、全く独創的な解法を得ることができた。

その他、新しい離散可積分系を構築するためには、古典可積分系の理論に良く使われる Darboux 変換と binary Darboux 変換に基づく、以前に連続可積分系の場合に開発した高次元可積分系に適用できる簡約法を離散可積分系に拡張した。

離散パルヴェ方程式などの低次元可積分系を分析するためには、解の特異点を調べるために導入された「特異点閉じ込め法」また

は、方程式に対する「初期値空間」を構築するために使われる「blow-up」等の代数幾何学的手法を用いた。

#### 4. 研究成果

(1) 超離散可積分系の解法とそれらの解釈に関しては、以下の成果を得た。

以前に、パリ第7大学の B. Grammaticos と エコール・ポリテクニクの A. Ramani との共同研究で発見した離散 sine-Gordon 方程式と離散 KdV 方程式を結ぶ Miura 変換をうまく利用することにより、超離散 sine-Gordon 方程式のソリトンの相互作用を普通の超離散 KdV 方程式と違う振舞いを示す超離散 KdV 方程式と結ぶことができた。この「新型超離散 KdV 方程式」の解の挙動を分析することにより、まず、超離散 sine-Gordon のソリトンの相互作用を完全に記述することに成功した。さらに、このソリトンの相互作用についての研究結果を、一般的な(実数上の)初期値まで拡張することを試みた。その結果、整数に制限した超離散 sine-Gordon 方程式のコーシー問題の一般的な解法のほかに、実数解の異常な相互作用が離散 sine-Gordon 方程式の正定値解の分散的性質に由来するこなどの興味深結果をいくつか得ることができた。初期値が整数値のみを取るときのコーシー問題は完全に解くことができたが、初期値が有理数値を取るコーシー問題については、今の時点では、部分的な結果しか得られていない。この研究課題により得られた研究成果についての論文は既に3本出版された。さらに、整数上のコーシー問題についての結果を発表する論文は現在作成中である。

グラスゴー大学の J.J.C. Nimmo と立教大学の S. Kakei との共同研究で、超離散 KdV 方程式のコーシー問題を解くための逆散乱法に類似した解法、及びその方法において大切な役割を果たしている action-angle 変数を、箱玉系の場合に表現論的な意味や組合せ論的な意味を持つ「rigged configuration」というスキームに現れる action-angle 変数と数学的に関連させることに成功した。さらに、その結果を整数上の超離散 KdV 方程式まで拡張することが可能である事実が、ごく最近、判明され、この新しい展開を含む研究成果を発表する論文は現在作成中である。

(2) 新しい離散可積分系の構築などについての研究課題に関しては、以下のように2つの研究成果を得た。

服部円佳との共同研究で、「広田・三輪」方程式という、多くの離散可積分系を簡約として含む高次元の離散可積分系の「symmetry

constraint」と呼ばれている新しい簡約方法を開発した。この方法を用いて、いくつかの有名な連続可積分系の離散化とそれらのソリトン解を含む広いクラスの厳密解を得ることができた。さらに、高次 Melnikov 系の可積分な離散化とその簡約として得られる D-型の対称性を持つ可積分系を構成することにも成功した。この結果を発表する論文はほどなく Journal of Mathematical Sciences に掲載される予定である。

Loughborough 大学の A.P. Veselov との共同研究で、(連続の) KdV 階層理論、及び bi-spectral 理論に大きな役割を果たしている Burchnall-Chaudy 多項式の離散版を構成することができた。具体的には、連続の Burchnall-Chaudy 多項式の定義式を連続極限にもつ非線形差分方程式を構築した。さらに、その方程式における特殊なコーシー問題に対し、その系の一般解が初期値の Laurent 多項式、つまり分母が単項式となるような初期値の有理関数であること示し、その「Laurent 現象」と呼ばれている性質を連続の Burchnall-Chaudy 多項式まで持ち上げることができた。この結果を発表する論文は既に出版されている。

(3) B. Grammaticos, A. Ramani と東京大学大学院数理科学研究科の T. Mase との共同研究で、複素平面上的非自励的雙有理写像の分類について研究を行い、平面上の有理写像の特異点閉じ込め法に対する性質とそういった写像のブローアップによる初期値空間の構成との関係を解明することなど、様々な研究成果をあげた。特に、与えられた非自励的雙有理写像が特異点閉じ込め法という離散可積分系の様々な分野でよく用いられているテストを通るためには、その写像におけるパラメーターがテストで判明される漸化式を満たさなければならないことは良く知られているが、その漸化式が、実は、写像のブローアップで構築できる初期値空間に対応する Picard 群への線形な作用と同値であることを示すことができた。さらに、この結果を踏まえて、平面上の雙有理写像の可積分性を見極めるための新しい判定法を提唱することもできた。既知の方法と比べて、与えられた写像の代数的エントロピーが特異点閉じ込め法から得られる簡単なデータのみで計算できることはこの新しい判定法のとて大きな利点である。これらの結果を発表する論文は3本あり、1つは既に出版されているが、他の2つは投稿中である。

#### <引用文献>

時弘哲治 (2010) 箱玉系の数理, 朝倉書店  
Takahashi D., Satsuma J. (1990) A soliton cellular automaton, Journal of the Physi-

cal Society of Japan, 59, 3514-3519.  
<http://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.59.3514>  
Willox R., Nakata Y., Satsuma J., Ramani, A., Grammaticos B. (2010) Solving the ultradiscrete KdV equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 43,482003.  
doi:10.1088/1751-8113/43/48/482003

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

1 R. Willox, M. Hattori, Discretisations of constrained KP hierarchies, Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 掲載決定済み, 査読:有  
<http://arxiv.org/abs/1406.5828>

2 A.P. Veselov, R. Willox, Burchnell-Chaundy polynomials and the Laurent phenomenon, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 48 (2015) 205201 (15pp), 査読:有  
doi:10.1088/1751-8113/48/20/205201

3 A. Ramani, B. Grammaticos, R. Willox, T. Mase, M. Kanki, The redemption of singularity confinement, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 48 (2015) 11FT02 (8pp), 査読:有  
doi:10.1088/1751-8113/48/11/11FT02

4 R. Willox, A. Ramani, B. Grammaticos, Solutions of the lattice sine-Gordon equation and the solitons of its cellular automaton, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 47 (2014) 125202 (12pp), 査読:有  
doi:10.1088/1751-8113/47/12/125202

5 R. Willox, A. Ramani, B. Grammaticos, The ultradiscrete sine-Gordon equation: introducing the oiston, 非線形波動研究の拡がり, 九州大学応用力学研究所研究集会報告書 No.25A0-S2 (2014) 29-34, 査読:有  
[http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/1448845/Article\\_No\\_05.pdf](http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/1448845/Article_No_05.pdf)

6 B. Grammaticos, A. Ramani, R. Willox, A sine-Gordon cellular automaton and its exotic solitons, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 46 (2013) 145204 (23pp), 査読:有  
doi:10.1088/1751-8113/46/14/145204

[学会発表](計9件)

1 Ralph Willox, Deautonomisation by singularity confinement: an algebro-geometric justification, Integrable Systems 2014, 2014年12月4日, The University of Sydney, オーストラリア

2 Ralph Willox, Discretisations of constrained KP hierarchies, SYMMETRIES & INTEGRABILITY IN DIFFERENCE EQUATIONS [SIDE - XI], 2014年6月19日, NATIONAL MATHEMATICS INITIATIVE (NMI) Indian Institute of Science, Bangalore, インド

3 Ralph Willox, An IST-like solution to the Cauchy problem for a soliton cellular automaton, 2014 Joint Mathematics Meetings of the American Mathematical Society & the Mathematical Association of America, 2014年1月18日, Baltimore, 米国

4 Ralph Willox, Ultradiscrete systems: integrable cellular automata and beyond, JSPS-DST Asian Academic Seminar 2013: Discrete Mathematics & its Applications, 2013年11月7日, 東京大学

5 Ralph Willox, The ultradiscrete sine-Gordon equation and its exotic soliton interactions, Nonlinear Mathematical Physics: Twenty Years of JNMP, 2013年6月12日, The Sophus Lie Conference Center, Nordfjordeid, ノルウェー

6 Ralph Willox, Solving the ultradiscrete KdV equation over the reals, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, 2013年3月19日, 京都大学

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

ウィロックス ラルフ (WILLOX Ralph)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 20361610

### (2)研究分担者

/

### (3)連携研究者

/