

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540206

研究課題名(和文)共形族の差分類似とDing-Iohara代数

研究課題名(英文)Difference analogues for conformal towers and the Ding-Iohara algebra

研究代表者

白石 潤一 (SHIRAIISHI, Junichi)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20272536

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：粟田、Feiginとの共同研究により、refined topological vertexをDing-Iohara代数の立場から理解した。

星野・野海との共同研究により、Askey-Wilson多項式の四重和公式を導き、それによって、一行の分割に付随するKoornwinder多項式の明示的公式を導出した。その公式によってLassalleの予想が証明がされた。

Braverman、Finkelbergとの共同研究により、Laumon空間のtwisted de Rham complexのEuler characteristicの母関数がMacdonald差分作用素の固有関数であることが示された。

研究成果の概要(英文)：A quantum group approach to the refined topological vertex of Iqbal-Kozcaz-Vafa is presented in terms of the Ding-Iohara algebra (joint work with H. Awata and B. Feigin).

A four-fold series expression is obtained for the Askey-Wilson polynomial. It gives us an explicit formula for the Koornwinder polynomials in one row case. Lassalle's conjectures for the Macdonald polynomials for types B,C,D are recovered, hence proved, as special cases of the formula for the Koornwinder polynomials (joint work with A. Hoshino and M. Noumi).

A geometric construction is presented for the Macdonald polynomials of A-type as the Euler characteristic of the twisted de Rham complex for the Laumon space. The Macdonald polynomials of other types can be considered in some other algebro-geometric setting, and a conjecture about a geometric construction is given (joint work with A. Braverman and M. Finkelberg).

研究分野：量子可積分系

 キーワード：Macdonald多項式 Askey-Wilson多項式 Koornwinder多項式 Ding-Iohara代数 topological vertex  
Laumon空間

1. 研究開始当初の背景

以下に、研究開始当初の背景について、研究動機及び研究目的にも適宜言及しながら、その要点を4つの項目 (A)、(B)、(C)、(D) に分けて記す。

(A) 本研究の主な目標のひとつは、Macdonald 多項式やその拡張に対して存在するある種の多変数超幾何級数的な明示的公式を研究することであった。その研究方針のひとつとして、Ding-Iohara 代数と呼ばれるある特殊な量子群の表現論を十分に展開する必要が生じた。さまざまなテンソル積表現を構成し、代数の生成元及び intertwining operator たちの行列要素を具体的に計算すると、さまざまな状況下で Macdonald 多項式に由来するような多変数超幾何級数が出てくるのが観察された。言い換えれば、Macdonald 多項式 (の明示的公式) に関するデータは、Ding-Iohara 代数の定義 (生成元に関する定義関係式、余積の構造等) に要約できることが認識されつつあった。

(B) 2次元の共形場の理論は、その理論の創始以来現在に至るまで、数学及び物理学に対して極めて深く重要な数理現象を生み出し続けている。Ding-Iohara 代数は、2次元の共形場の理論の差分類似を研究するために重要な足がかりを与えていることは明らかである。例えば、変形ピラソロ(ないし  $W$ ) 代数が、Ding-Iohara 代数のフォック表現のテンソル積表示を通じて自然に現れてくる。従って、Ding-Iohara 代数の研究によって Macdonald 多項式と変形ピラソロ(ないし  $W$ ) 代数との関係をさらに追求する可能性が開かれた。

(C) Alday-Gaiotto-Tachikawaの予想と関連して、Ding-Iohara代数の表現論の理解を深めることは当初から重要な課題であった。Ding-Iohara代数の持つ  $SL(2, Z)$  の対称性は、表現論を非常に豊かなものにしてている。実際、テンソル積表現を構成する際に、各テンソル成分に個別の  $SL(2, Z)$  を作用させて、そのような空間に対する intertwining operator を調べることができる。その intertwining operator の行列要素を、Iqbal-Kozcaz-Vafa の refined topological vertex と呼ばれる量と比較ないし同定してみるとという問題が生じていた。そのような研究は、Ding-Iohara代数の表現空間の間の intertwining operator の積の真空期待値と、Nekrasov 分配関数とが全く一致するというを示すことを目標として着想された。それによって、代数の表現論の立場から Alday-Gaiotto-Tachikawa の予想 (の  $K$  理論版) に解決を与えようと試みたのであった。

(D) Laumon の擬旗空間は  $A$ -型の Drinfeld の擬写像空間の small な特異点解消を与える。量子コホモロジーの研究の立場から見れば、同変  $K$  理論の意味で Laumon 空間の twisted de

Rham complex の Euler characteristic は、量子戸田ハミルトニアン の差分類似となるような量子可積分系のハミルトニアン の固有関数であることが期待されていた。それを代数幾何学的な取り扱いによって研究することは大変興味深い問題であった。

2. 研究の目的

「背景」に記述した項目に沿って研究の目的を項目ごとに整理する。

(A) Ding-Iohara 代数の表現論を研究し、Macdonald 多項式、Askey-Wilson 多項式や Koornwinder 多項式の明示公式を研究し、その組合わせた構造を解明する。

(B) 2次元の共形場の理論の差分類似の可能性について、Ding-Iohara 代数の立場から研究する。BPZ 方程式の差分類似と Macdonald の差分方程式との関係を調べる。

(C) Iqbal-Kozcaz-Vafa の refined topological vertex を Ding-Iohara 代数の表現論を用いて再構成し、Nekrasov 分配関数が行列要素として自然に現れるような枠組みを構成する。

(D) Laumon の擬旗空間に関して twisted de Rham complex の Euler characteristic を研究し、幾何学的表現論と Macdonald 多項式との関係を明らかにする。

3. 研究の方法

以下、研究の方法について、「背景」に記述した項目の番号を示しながら説明する。

(A)、(B)、(C) について、Ding-Iohara 代数のフォック表現のテンソル積表現をできるだけ系統的に調べる。その際、 $SL(2, Z)$  の対称性を用いて、それぞれのテンソル成分ごとに異なったレベルベクトルを与えることが重要となる。そのための基礎的な計算技術を確認する。そのような表現空間の intertwining operator の存在と一意性を示すこと及び具体的な表示式を求めることが必要となる。

さらに、各フォック表現にはスペクトル変数が対応させられていることに注意する。基本的な演算子の合成により、多数のフォック空間のテンソル表現から、多数のフォック空間のテンソル表現への intertwining operator が定められるが、この複合演算子は、各空間のレベルベクトルとスペクトル変数に依存することとなる。

このような複合演算子の幾つかの積を考察する。表現空間の構成から、これはある種の六角格子上に定められた量と考えることが自然である。

そのような複合演算子のある種の行列要素は、基本的 intertwining operator の具体的な表示を用いれば、非常に簡単に計算することができる。その行列要素の式ないし性質を、Iqbal-Kozcaz-Vafa の refined topological vertex と比較する。

refined topological vertex の研究におい

て、Nekrasov 分配関数を与えるような六角格子の構成は知られている。そのような状況から考えて、Ding-Iohara 代数の表現論の枠組みで、Alday-Gaiotto-Tachikawa の予想(の K 理論版)について一定の理解を得ることができる。

さらに、六角格子上の複合演算子の性質を追求することができる。実際、スペクトル変数があるやり方で特殊化すると、(A 型の)Macdonald 多項式の明示的公式が、Nekrasov 分配関数の特殊化として得られる。

このような現象を理解する一つの方法として、2次元の共形場の理論の差分類似の可能性を追求し、Ding-Iohara 代数の立場から Macdonald の差分作用素を導出し、それによって BPZ 方程式の差分類似の研究を進めることができるであろう。この方面の研究は、今後プライマリ場とその共形族の差分類似のあるべき姿を見抜くための重要な足がかりとなると思われる。

次に、項目(A)、特に A 型以外の Macdonald 多項式、Askey-Wilson 多項式や Koornwinder 多項式の研究の方法について述べる。

B、C、D 型の Macdonald 多項式の明示的公式について、Lassalle の予想が知られていた。その証明法について、大分前から私はおおよその方針を持っていたのだが、その要となるのが Askey-Wilson 多項式のある種の四重和的な明示的公式の構成であった。その公式はその複雑さゆえに長い間完成しなかったのであるが、幸いにもその四重和公式を証明することができた(星野・野海との共同研究)。Koornwinder 多項式の核関数関係式の技術を用いて Askey-Wilson 多項式の四重和公式を伝搬させ、適当なパラメータの退化を行うことで、Lassalle の予想式に証明を与えることができる。

Ding-Iohara 代数のフォック表現と Koornwinder 多項式の関係についても研究を行うことができるが、Koornwinder 多項式の明示的公式に関する理解を組織的に得る段階にはまだ至っていないように感じられる。

最後に、項目(D)について述べる。量子コホモロジーの立場から、代数幾何学的手法により Macdonald 多項式を理解することを目指す。Laumon の擬旗空間は A-型の Drinfeld の擬写像空間の small な特異点解消を与えるのであった。

同変 K 理論の意味で Laumon 空間の twisted de Rham complex の Euler characteristic を調べることは、あるモジュライ空間の(余)接空間の構造の研究に帰着するが、その周辺の研究はだいぶ以前に A. Braverman, M. Finkelberg によってなされていた。コホモロジーの消滅定理と、そのモジュライ空間の(余)接空間の構造のデータを用いれば、レフシェッツの固定点定理から Euler characteristic を具体的に計算することができる。

その母関数が Macdonald 差分作用素の固有

関数であることは、組合わせた議論によって証明することができる(A. Braverman, M. Finkelberg との共同研究)。

#### 4. 研究成果

以下、得られた研究成果を記す。

栗田、Feigin との共同研究によって、Iqbal-Kozcaz-Vafa の refined topological vertex を Ding-Iohara 代数の表現論の立場から理解した。

星野・野海との共同研究によって、Askey-Wilson 多項式の四重和公式を導き、それによって、一行の分割に付随する Koornwinder 多項式の明示的公式を導出した。その公式でパラメータを特殊化することによって Lassalle の予想が証明がされたことになる。

Braverman, Finkelberg との共同研究によって、Laumon 空間の twisted de Rham complex の Euler characteristic の母関数が Macdonald 差分作用素の固有関数であることが示された。一般の型の Macdonald 多項式の幾何学的構成について予想が与えられた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

<sup>1</sup> Hoshino, M. Noumi and J. Shiraishi, Some transformation formulas associated with Askey-Wilson polynomials and Lassalle's formulas for Macdonald-Koornwinder polynomials, to appear in Moscow Mathematical Journal.

<sup>2</sup> Alexander Braverman, Michael Finkelberg, Jun'ichi Shiraishi, Macdonald polynomials, Laumon spaces and perverse coherent sheaves, Contemp. Math., 610 (2014) 23-41.

<sup>3</sup> H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, Quantum algebraic approach to refined topological vertex, JHEP 03 (2012) 041.

[学会発表](計 6 件)

<sup>1</sup> 星野歩, 野海正俊, 白石潤一, 一行型  $C_n$  型 Macdonald 多項式のタブロー和表示, 日本数学会年会, 2015年3月23日, 明治大学

<sup>2</sup> 星野歩, 野海正俊, 白石潤一, Askey-Wilson 多項式の四重級数表示, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月25日, 広島大学

3 星野歩, 野海正俊, 白石潤一,  
一行型 Koorwinder 多項式の明示的公式と  
Lassalle の予想の証明,  
日本数学会秋季総合分科会,  
2014 年 9 月 25 日, 広島大学

4 Junichi Shiraishi,  
On Askey-Wilson polynomials,  
Representation Theory and applications to  
Combinatorics, Geometry and Quantum  
Physics,  
International Conference dedicated to the  
60-th birthday of Boris Feigin  
December 13-19, 2013,  
Higher School of Economics, Independent  
University of Moscow (Moscow, Russia).

5 Junichi Shiraishi,  
Elliptic hypergeometric series,  
Ruijsenaars operator and Heine's  
transformation formula,  
Elliptic Integrable Systems and  
Hypergeometric Functions  
from 15 Jul 2013 through 19 Jul 2013,  
Lorents Center, Netherlands.

6 白石潤一,  
Vertex operators, Nekrasov partition  
functions and Macdonald polynomials,  
日本数学会秋期総合分科会, 特別講演, 九  
州大学, 2012 年 9 月 18 日.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

白石 潤一 (SHIRAISHI Junichi)  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：20272536

### (2)研究分担者

( )

研究者番号：

### (3)連携研究者

( )

研究者番号：