様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０２１５

研究課題名（和文）ｐ調和写像流の大域存在と退化特異放物型作用素の正則性評価

研究課題名（英文）Regularity for the evolutionary p-Laplace operator and global existence of the p-harmonic map flows

研究代表者
三沢　正史（MISAWA, MASASHI）

熊本大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：４０２４２６７２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）： p調和写像は，二つの滑らかなコンパクト多様体間の写像の一階導関数のp乗積分汎関数の臨界点として定義され，そのEuler Lagrange方程式の解である．Euler Lagrange方程式は,p調和型の2階退化特異楕円型偏微分方程式である.本研究では，とくにその時間発展，p調和写像熱流，の存在と正則性を研究した.主要な結果は以下である：p調和写像熱流の像の小さい解の正則性を証明した．とくに，正則性条件を，幾何学的に自然な条件によって与えた．応用として，空間次元mに対してm調和写像熱流の小さい解の正則性と存在，および定常解，m調和写像型の解，への収束を証明した．

研究成果の概要（英文）： We have been studied the regularity problem for p-harmonic map heat flows. The p-harmonic maps are critical points for p-energy for maps beteween two smooth compact Riemannian manifolds and so, the solution of the Euler Lagrange equation of p-energy, which is 2nd ordered degenerate and singular elliptic partial differential equations of so-called p-Laplcian type. In this research project we will study the existence and regularity of solutions of the p-harmonic map equations. In particular, we study the evolution equation, called the p-harmonic map heat flow. Our main result is to show the regularity of small solutions of the p-harmonic map heat flows. Under this main result, we also to show the regularity and existence of a global small solution of the m-harmonc map type heat flows with space dimension m. The asymptotic behavior to the stationary solution is also shown.

研究分野： 偏微分方程式

キーワード： 偏微分方程式　退化特異放物型作用素　正則性特異性　調和写像　調和写像熱流　p調和写像　p調和写像熱流

１．研究開始当初の背景

(1) (研究の簡単な背景) p 調和写像は，調和写像(p=2 の場合)の自然な拡張である．調和写像が，よく知られた調和関数の多様体への自然な一般化である一方，p 調和写像は，p 調和関数のそれに対応している．p 調和写像方程式は，写像先の多様体 N のベクトル束 T(N)上の p 調和方程式であり，とくに，N(⊂ R^l l≥2，の等距離埋め込み)の第２基本量(一階導関数に関して p 乗増大度の非線形量)をもつ非線形退化特異楕円型２階偏微分方程式系であるので，一般に滑らかな(連続微分可能な)解をもつとは限らない．p 調和写像の存在，正則性に関する基本的な結果は以下である．

・Dirichlet 境界値問題の p エネルギーの最小化関数の存在(Dirichlet 原理)．
・p エネルギー最小化解が部分的に連続微分可能である(R. Hardt, F. H. Lin, M. Giaquinta, S. Luckhaus, M. Fuchs らによる 1980 年代後半の結果)．
・定義域 M の次元 m が p と一致する場合(m=p)には，m 調和写像の弱解(エネルギー有限の解)は連続微分可能である(詳しくは，写像先多様体 N のある対称性の仮定のもと)(F. Duzaar, M. Fuchs, L. Mou, P. Yang, P. Strzelecki, C. Wang らの 1990 年代の結果)．

(2) (未解決問題)　しかしながら，p 調和写像の一般の弱解の存在およびその正則性については，未解決のままである．そこで，本研究では，p 調和写像の一般の弱解の存在とその正則性を調べるために，次の問題を研究する：

p エネルギーの勾配流，p 調和写像流，の弱解の時間大域的存在とその弱解の正則性(連続性，連続微分可能性)

p 調和写像流は，p エネルギーの最急降下曲線を定めるのであり，したがって，その解の時間無限大の極限関数は定常解，p 調和写像，となることが予想される．とくに，任意の初期値から出発する p 調和写像流は，エネルギー最小化関数以外の p 調和写像に収束することが期待される．これが，J. Eells と J. H. Sampson が最初に p=2 の場合に，調和写像流を考えた所以であった(Eells-Sampson の方法)．p=2 の場合，調和写像流の弱解は時間大域的に存在して，(部分的)に滑らかである(M. Struwe, K.-C. Chang, Y. Chen, F. H. Lin らの 1980 年後半の結果)．また，滑らかでない点，特異点，の集合の(Hausdorff 測度の)大きさは，幾何学的な意味で最良に評価できる．とくに，空間 2 次元(p=m=2)の場合には，特異点集合は有限個に限る．申請者は，15 年来，これら結果を p 調和写像流に一般化しようと研究してきたが，未だに解決されていない．

２．研究の目的

(1) (解決したい問題) 本研究では，以下の問題の解決を目指す：

小さい解の存在と正則性：写像先多様体上，像が小さい p 調和写像流の弱解の構成とその正則性(連続性，連続微分可能性)の研究，ここに，写像先多様体上，像が小さいとは，たとえば，写像先の多様体が球面の場合には，上半球面の内側に像があること．

(2) (研究の具体的内容)　p 調和写像流は，主要部が時間発展 p 調和作用素であり，一階導関数の p 乗増大度の低階項(写像先多様体の第２基本量)をもつ退化特異放物型２階偏微分方程式系で記述される．p 調和写像(流)方程式はエネルギー臨界の方程式である．実際，通常のエネルギー評価(方程式に解を掛けて部分積分)によってエネルギー有界性が成立しない．正則性評価には，解自身の大きさになんらかの小ささが必要である．一方，解は，写像先多様体上の座標を表しているので，解の大きさは，写像先多様体上の像の大きさそのものである．実際，解の小ささは，写像先多様体の曲率(とくに断面曲率)によって特徴つけられる．これによって，小さい解に対しては最大値の原理が成り立つ．写像先多様体上の像の小さい境界値に対して，調和写像の滑らかな解が存在する(S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman の 1970 年後半の結果)．この結果は，調和写像流に拡張されている(M. Struwe, M. Giaquinta の 1985 年前後の結果)．これら結果を p 調和写像流に拡張しようとするのが，上記の問題である．p 調和写像流は，時間発展 p 調和作用素で記述され，時間発展 p 調和作用素は非同次作用素であって，p=2 の調和写像流の熱作用素とは本質的に異なる．まずは以下の問題を考察する．

(小さい解に対する先験的連続性評価) p 調和写像流方程式の小さい解のヘルダー連続性評価

(3) (学術的特色，意義)　解の部分的正則性と特異点集合の研究は，幾何学，物理における非線形偏微分方程式の弱解の正則性問題において自然に出現する．解の正則性条件を幾何学的，物理的に特徴つけることは重要な問題である．Minkowski 空間上の調和写像である波動写像の弱解の構成は，滑らかな解の族が，エネルギー収束(強収束)する条件を証明し，エネルギー収束しない部分(閉)集合の大きさを見積もることで証明された(P. L. Lions の concentration compactness の方法，M. Struwe, S. Müller らの結果)．R. Hamilton, G. Pelerman は，Poincaré 予想の解決のために，Ricci 曲率流の正則性特異性の解析を行った(2007 年度フィールズ賞)．p 調

和写像流の弱解の(部分的)正則性の研究は，自然な必須の研究課題であり，他の幾何学的，物理的に重要な非線形偏微分方程式の正則性特異性の研究と相互に関連して，今後の進展が大いに期待できる．

３．研究の方法

(1) (問題の分割) 本研究計画では，

p 調和写像流の**小さい像の弱解の時間大域存在とその正則性**(連続性，連続微分可能性)

の問題の解決を目指す．このために以下のように問題を分けて研究する:

a．**p 調和写像流**の**小さい解**が，ヘルダー連続であるための**最良の正則性条件**の構築
b．解の**像が幾何的に最良に小さいとき**，**a** の正則性条件が成り立つことを証明する．

(2) (**a** 問題の解決の手順)　p 調和写像流方程式の，写像先多様体上，像の小さい弱解がヘルダー連続であるための条件を，あるスケール p エネルギーのある小ささによって与える．このスケールは，p 調和写像流方程式を不変に保つスケール変換で定まり，とくに，時間発展 p 調和作用素の非同次性によって，解の大きさに依存して選ぶ必要がある．このようなスケール変換は．すでに，Di Benedetto によって提案されていた(1989-1990 の結果)．評価を実行する時空局所領域(時間，空間変数の領域)のサイズと解の大きさ，この 2 つのスケール変数をどのように選ぶかが数学的な問題である．ここでは，J. Lewis と J. Kinnunen の方法(2002 年の結果)を発展させて利用する．2 つのスケール変数を上手く選ぶ．幾何学的に自然であり，方程式を不変にするスケール変換を選び，これによってスケール p エネルギーを定める．このとき，

a．(**正則性条件の構築**)　スケール p エネルギーがある閾値より小さいならば，弱解はヘルダー連続である
ことを証明する．

スケール p エネルギーを幾何学的に最良に選ぶことが問題である．申請者は，時間発展 p 調和方程式系に対して，弱解のヘルダー連続性を，外力項の最良の可積分条件によって証明した．この結果を応用することで **a** の問題を解決できると予想している．次いで，

(3) (**b** 問題の解決の手順)
b-1．(**像が十分小さい弱解の正則性**)　写像先多様体上の像が”十分に小さい”ならば，**a** で証明した正則性条件，スケール p エネルギーがある閾値より小さい
ことを証明する．

ここで，写像先多様体上の像が十分に小さいとは，写像先多様体が球面の場合には，半球面のさらに半分より上部に解の像があることを意味する．**a**，**b-1** は，像が十分に小さい解に対する先見的連続性評価を意味する．これにもとづいて，

b-2．(**像の十分小さい弱解の時間大域存在とそのヘルダー連続性**)　写像先多様体上，像が十分小さい初期境界値に対して，像の小さい弱解の時間大域存在とそのヘルダー連続性
を証明する．

次いで

b-3．(**正則性が成り立つための，解の最良の像の小ささ**)　**b-1** における，**a** の正則性条件が成り立つための，弱解の像の小ささについて，幾何学的に自然な十分条件はなにか
を研究する．

写像先多様体が 2 次元球面の場合には，赤道上に像があり，特異点(不連続点)を原点にもつ，3 次元球から 2 次元球面への調和写像を構成できる(H. Brezis, J. M. Coron らの 1980 年代前半の結果)．したがって，半球面の内部に像をもつことが，調和写像流(p=2 の場合)の正則性が成り立つ最良の幾何学的条件となる(M. Giaquinta, M. Struwe)．この最良の像の小ささのもと，弱解のヘルダー連続性を証明するためには，熱作用素(2 階放物型作用素)に対する Harnack 型評価が本質的な役割を果たす．そこで，**b-3** の問題を研究するために

b-4．時間発展 p 調和作用素に対する **Harnack 不等式**を応用すること
を考える．

時間発展 p 調和作用素に対する Harnack 不等式は，最近，Di Benedetto らによって,ほとんど最良と思われる形で得られた．この Harnack 不等式をどのように p 調和写像流方程式に応用するのかが，**b-3** の問題の解析的な観点である．時間発展 p 調和作用素は，非同次作用素であり，調和写像流(p=2 の場合)とは本質的に異なる．解の大きさに依存するスケール変数と時空局所領域のサイズのスケール変数を上手くアレンジして，評価する必要がある．

(3) **役割分担**　**a**，**b** の問題を解決するために，以下のように役割分担して研究を進める．
1．代表者の三沢は，主に p 調和写像の弱解の正則性条件の研究に携わる．関連する国内外の偏微分方程式，実解析，関数解析関係の研究集会，セミナーに参加し，必要な情報を収集し，それらにもとづいて，定期的に代表者所属大学でセミナーを開いて，

連携研究者，関連研究者と研究打ち合わせを行う．

2．連携研究者の山浦は，p 調和写像流の弱解を構成するために，弱収束の方法，P. L. Lions の concentration-compactness の方法，の改良精密化について研究する．

４．研究成果

(1) p 調和型退化特異放物型方程式系の弱解の正則性を証明した． とくに以下のことを証明した．

① 弱解のヘルダー連続関数であるための，外力項に対する最良の可積分条件

② 弱解の空間一階導関数がヘルダー連続関数であるための， 外力項に対する最良の可積分条件

③ エネルギークラスの弱解に対して正則性の成り立つための，非線形項のクラスを与えた

以上の結果は，とくに p=2 の場合の楕円型，放物型方程式系の古典的な正則性の結果を含む

これら証明のために，古典的な正則性のいわゆる直接的方法を，p 調和型放物型作用素の特別なスケーリング変換のもと一般化した．この方法は，イタリアの G. Mingione，フィンランドの T. Kuusi，ドイツの F. Duzaar らの非直接方法(コンパクト性の方法，blow up の方法，De Girogi の調和近似の方法とも呼ばれる)とは異なるものであり，p 調和作用素の基本的正則性の方法である．
p>2 の退化の場合ばかりでなく，1<p<2 の特異の場合にも証明した(「5．主な発表論文等」中，①，④))

(2) p 調和写像熱流の正則性を証明した．とくに以下のことを証明した．

① p>2 の退化の場合に，p 調和写像熱流の小さい弱解の正則性条件を証明した．この条件は，p 調和写像の変分的構造からは，自然なものである．実際，p=空間次元 m の場合には，小さい弱解は正則であることが自動的に従う(「5．主な発表論文等」中，②，⑥)．

② 高次元定平均曲率熱流の時間大域存在と正則性．p=空間次元 m の場合の m 調和写像熱流に関係する．m=2 の空間 2 次元の場合に知られた O. Rey の古典的結果を含む．
解の大域存在のために，方程式系の変分構造にもとづくある近似法を導入した．この方法は海外(イタリア，スペインなど)の研究者によって，数値計算に応用されている．

(3)(今後の展望) 本研究の目的の一つであった，p 調和写像熱流の小さい解の正則性ついては，現在も未解決である．少なくとも幾何学的には反例は見つかっていないので，証明できることが期待される．p=2 の調和写像の場合には，熱作用素の基本解いよる表現公式が重要な役割を果たした．p 調和型放物型作用素は非線形作用素であり，解の表現公式はあり得ない．基本解である Barenblatt 解を試験関数に利用して局所エネルギー評価が有効であると想定している．今後の課題である．
また，解が小さいことを仮定しない(小さい解の具体例はるのだが)一般の場合には，p 調和写像熱流に対する正則性条件は知られていない．これは最終的な課題である．この問題に対しても，p 調和型放物型作用素の基本解である Barenblatt 解の利用が有効であると期待される．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）

① Hölder regularity for singular parabolic systems for p-Laplacian type, C. Karim, M. Misawa, to appear in Advance in Differential Equations (2015), 32Page typed，査読あり，
http://www.aftabi.com

② The regularity for nonlinear parabolic systems of p-Laplacian type with critical growth, C. Leone, M. Misawa, A. Verde, J. Differential Equations 256 (2014), 2807-2845，査読あり，
http://dx.doi.org/j.jde.2014.01.018

③ L^2 boundedness for the 2D exterior problem for the semilinear heat and dissipative equations, T. Kobayashi, M. Misawa, RIMS Kokyuroku Bessatsu B42 (2013), 1-11，査読あり，
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html

④ A Hölder estimate for nonlinear parabolic systems of p-Laplacian type, M. Misawa, J. Differential Equations 254 (2013), 847-878，査読あり，
http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2012.10.001

⑤ A Hölder continuity of minimizing symphonic maps, M. Misawa, N. Nakauchi, Nonlinear Anal. 75, no. 15 (2012),

5971-5974，査読あり，
http//dx.doi.org/10.1016/j.na.2012.06.010
⑥ A global existence result for the heat flow of higher dimensional H-systems, C. Leone, M. Misawa, A. Verde, J. Math. Pures. Appl. (9) 97, no. 3 (2012), 282-294, 査読あり，
DOI: 10.1016/j.matpur.2011.11.001

⑦ Decay property for the linear wave equations in two dimensional exterior domains, T. Kobayashi, M. Misawa S. Okamura, Differential and Integral Equations 24 (2011), 941-964, 査読あり，
http://www.aftabi.com

(注) ⑥，⑦の論文は平成23年度出版のものだが，実際には平成 24 年に出版公開され，本研究と直接関係する．

〔学会発表〕（計９件）

① Monotonicity type estimate and regularity of the p-harmonic map heat flows, M. Misawa, 台湾数学会，関数方程式分科会（招待講演），2014.12.6-2014.12.7，台湾成功大学

② Regularity of the p-harmonic map heat flows, M. Misawa, The 9th East Asia Partial Differential Equations Conference (Satellite of Seoul-ICM, Korea (招待講演), 2014.7.28-2014.7.31，ホテル日航奈良

③ p 調和作用素の正則性と単調性評価，三沢正史，秋田における偏微分方程式論集中ワークショップ（招待講演），2014.7.11-2014.7.13，秋田大学教育文化学部

④ p 調和作用素と関連する幾何学的変分問題とその正則性問題，三沢正史，函館における偏微分方程式論集中ワークショップ(招待講演)，2014.4.5-2014.4.6，公立はこだて未来大学システム情報学部

⑤ p 調和写像熱流の正則性について，三沢正史，微分方程式の総合的研究（招待講演），2013.12.21-2013.12.22，東京大学数理科学研究科

⑥ Regularity problems for the evolution of p-harmonic maps, M. Misawa, Quasilinear PDEs & Game Theory (invited), 2013.12.02-2013.12.4, Uppsala University, Uppsala, Sweden

⑦ On regularity conditions of the p-harmonic map flows, M. Misawa, International Seminar at Evolution Problems (invited), 2013.9.10, Institute Mittag-Leffler, Stockholm, Sweden

⑧ p ラプラス作用素に対する存在，正則性と関連する変分問題−エネルギー臨界型 p 調和方程式系の弱解の正則性とその応用，三沢正史，第 34 回発展方程式若手セミナー特別講演（招待講演），2012.9.1-2012.9.4，タナベ湘南研修センター

⑨ A regularity for nonlinear parabolic systems of p-Laplacian type with critical growth, M. Misawa, Analysis Seminar (invited), 2012.9.11, Aalto University, Helsinki, Finland

６．研究組織
(1)研究代表者
三沢 正史（MISAWA, Masashi）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：40242672

(2)連携研究者
山浦 義彦（YAMAURA, Yoshihiko）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号： 90255597