

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：34428

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540223

研究課題名(和文) ランダム平面分割における可積分構造と対称性

研究課題名(英文) Integrability and symmetry in melting crystal model

研究代表者

中津 了勇 (NAKATSU, toshio)

摂南大学・理工学部・教授

研究者番号：10281502

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：ランダム平面分割は、近年、超対称ゲージ理論のサイバーグ・ウィッテン幾何、グロモフ・ウィッテン不変量、ミラー対称性との関連が見出され、数理解物理の新たな研究対象になっている。さらに、最近、可積分系とのつながりも見出されている。ランダム平面分割における可積分構造と幾何構造について、既に同定されている量子トーラス対称性などを用いて、その更なる理解と応用を現実的に追及することが、主な目的である。成果として、2種類の時間変数を入れて拡張した異なるバージョンのランダム平面分割の分配関数の間の双対関係の発見、その可積分構造(相対論的戸田階層)の発見。さらに関連が予想されるq差分系についての成果を得た。

研究成果の概要(英文)：Random plane partitions or melting crystal model was an old topic in the branch of combinatorics. However, it has been found surprising relations with other branches in modern mathematical physics, such as the Seiberg-Witten theory of supersymmetric gauge theories, Gromov-Witten's invariants and the mirror symmetry of Calabi-Yau 3-folds. The model has been also studied from the integrable system viewpoint. We further elucidate integrable structures of various melting crystal models, using quantum torus symmetry. It explains clearly the underlying integrable structure is Toda hierarchy and its cousins. Using the symmetry, we also derive the q-difference equations wave functions of topological branes probed in the tological vertex chains satisfy.

研究分野：数物系科学

キーワード：可積分系 数理解物理 ランダム平面分割 量子トーラス 戸田階層 超対称ゲージ理論 超弦理論

1. 研究開始当初の背景

場の量子論は無限大自由度の協同現象を記述する枠組み・言語である。その豊かな内容の理解においては、数学的な議論が重要な意味を持ち、数理的考察により、物理学の深い理論が構成されてきた。同時に、場の量子論の経路積分を用いる発見的手法により、組み紐の不変量など重要な数学的結論も得られている。このような状況にあって、厳密に解ける場の量子論に内在する可積分構造と対称性を深く理解することはきわめて重要である。今回の研究では、ゲージ理論の厳密解、ミラー対称性、グロモフ・ウィッテン不変量などに関連する数理物理の新たな研究対象であるランダム平面分割に焦点を当て、その可積分構造と対称性を深く理解することに迫る。

ランダム平面分割は、平面分割の確率モデルである。比較的古くから組合せ論の研究対象であった。非負整数の2次元配列で、任意に1つの列もしくは段を固定するとき、そこに現れる1次元配列が整数の「分割」(partition)となるものを、「平面分割」(plane partition)と呼ぶ。2次元配列を対角線に平行な半直線に切り分けて、「分割」の列と見ることもできる。この確率モデルは、2つの不定元 q ($|q| < 1$), Q をパラメータとする平面分割の数え上げの母関数と関係する。

超対称ゲージ理論の厳密解、ミラー対称性、グロモフ・ウィッテン不変量との関連を手短にまとめておこう。不定元 q, Q をゲージ理論のパラメータで書き直せば、確率モデルの分配関数は5次元 $U(1)$ 理論のネクラソフ関数と等しい。すなわち、インスタントン(反自己双対接続)のモジュライ空間上のディラック作用素の同変指数となる。超弦理論においては、同様の操作で、局所 $U(1)$ ジオメトリーと呼ばれる3次元の開カラビ・ヤオ多様体上の超弦の厳密振幅となる。グロモフ・ウィッテンのプレポテンシャルの量子化と呼ぶべきものである。

さらに、可積分系との繋がりも見出されている。中津・高崎によって、ランダム平面分割における可積分構造として、1次元戸田階層が得られている。主対角の分割に対して、新しく無限個の結合定数を許すポテンシャルを導入する。こうして得られる外部ポテンシャル中のランダム平面分割の分配関数は、1次元戸田階層のタウ関数を与える。無限個の結合定数が1次元戸田階層の時間変数である。この可積分性の鍵は、中津・高崎の見出したランダム平面分割における量子トラス対称性にあった。外部ポテンシャルは、 $UV = qVU$ を満たす U, V が生成する非可換2次元トラスのLie代数(量子トラスLie代数)で特徴付けられる。

また、平面分割の漸近挙動を記述する熱力学は、1次元戸田階層の無分散極限が対応する。「分割」がヤング図で視覚化できるのと同様に、「平面分割」は立体ヤング図形で視覚化できる。リミットシェープと呼ばれる立体ヤング図形の巨視的形状が、平面分割の漸近挙動の視覚化である。この熱力学を記述する無分散1次元戸田階層の解は中津・高崎により得られている。その記述の要は、2次元シリンダーを2重被覆する種数0の代数曲線と、その曲線上の有理微分である。これらは、立体ヤング図形の巨視的形状を決定し、5次元理論の拡大サイバーク・ウィッテン曲線、拡大サイバーク・ウィッテン微分と呼ばれる。

2. 研究の目的

この研究の方向は、研究代表者・分担者が行ってきた研究をさらに発展させ、ランダム平面分割における可積分構造と対称性の精密な理解とその応用を追求することである。ランダム平面分割における可積分構造と対称性は、ゲージ理論や超弦理論の厳密解に現れる可積分構造と対称性でもある。この研究には、組合せ論の限定的な問題の定式化を超えて、インスタントンのモジュライ空間やカラビ・ヤオ多様体のミラー対称性への直接的な応用を持つ、という特徴がある。従来可積分系研究で論じられてこなかったランダム平面分割を題材に、可積分系と数理物理の新たな関連を探ることは十分興味深いと思われる。具体的な目標の詳細を挙げよう。

(1) ランダム平面分割の分配関数は1次元戸田階層のタウ関数である。この特殊解を与える無限次元クリフォード群の要素と量子トラスの間に成り立つ関係式から、ピラゾロ/W-拘束条件に相当する一般化弦方程式が調べられている。ランダム歪平面分割(skew plane partition)の分配関数も同じ方程式を満たす可能性がある。方程式の解空間の構造を調べることに。

(2) 平面分割の確率測度にはいくつかバージョンが有り得る。数理物理への応用から重要であるのは、 k に整数量子化されたチャーン・サイモンズ結合を持つ $U(1)$ 理論のネクラソフ関数と相当する局所ジオメトリーの超弦の厳密振幅を再現するバージョンである(既述の確率測度は $k=1$ の場合)。これらを可積分階層の特殊解として決定し、その一般化弦方程式を求めることに。

(3) $U(N)$ 理論まで包含する形式にランダム平面分割の可積分構造を拡張すること。ランダム平面分割からの $U(N)$ ゲージ理論のネクラソフ関数の導出が可能である。量子トラス対称性の整合性を調べて、その定式化を行う。得られる可積分構造として、変形KP階層の

N-簡約などを予想している。

(4) ランダム平面分割の無限粒子系への応用。平面分割から得られる整数分割の列は、離散時間発展する分割の生成・消滅の歴史とみなせる。ランダム平面分割は分割の生成・消滅過程である。1次元排他過程や界面成長モデルへの応用等を考察する。

2. 研究の方法

研究課題の中心部分(1)-(3)は、研究代表者の中津が研究分担者の高崎金久教授(京都大学人間環境学研究所 -> 近畿大学理工学部)と、過去の共同研究の延長として取り組む。過去 15 年以上にわたる研究協力の実績があり、弦理論、ゲージ理論、確率モデルの可積分構造に関する 11 編の共著論文がある。ランダム平面分割における可積分構造の精密な理解、一般化弦方程式の確定、 $U(1)$ 理論の N-簡約などを目指した。月に数回不定期に相手の研究室を訪れて、大まかな基礎を論じ合い、e-メール・電話で細部を討論した。武部尚志教授(モスクワ高等経済学校数学部)、村瀬元彦教授(カリフォルニア大学デービス校数学部)など海外研究者との情報交換を行った。中津は、インスタントンのモジュライ空間と構成法について、浜中真志助教(名古屋大学大学院多元数理研究科)と研究を進めた。ランダム平面分割はシューア過程と呼ばれる確率過程の一例である。(4)の無限粒子系への応用は中津・高崎の共同で進めるが、最初は基本的な技法の学習に徹した。

4. 研究成果

比較的古くから組合せ論の研究対象であったランダム平面分割は、近年、超対称ゲージ理論の低エネルギー厳密解(サイバーク・ウィッテン幾何)、グロモフ・ウィッテン不変量、ミラー対称性などとの関連が見出され、数理物理の新たな研究対象になっている。さらに、最近、可積分系とのつながりも見出されている。ランダム平面分割における可積分構造と幾何構造について、既に同定されている量子トールス対称性などを用いて、その更なる理解と応用を現実的に追及することが、主な目的である。成果として、2 種類の時間変数を入れて拡張した異なるバージョンのランダム平面分割の分配関数に関して、それらの間に成り立つ双対関係式の発見、可積分構造(相対論的戸田階層)の発見。異なるバージョンのランダム平面分割における可積分構造と量子トールス対称性に関する理解。関連が予想される q 差分系についての成果を得た。

(1) 中津は外部ポテンシャルを入れたランダム平面分割の熱力学極限に関する解析を進めた。具体的には、5次元 $U(N)$ 理論の拡大

ネクラソフ関数を導く場合について、確率モデルのヘルムホルツ自由エネルギーの2次形式による表示を与えて、自由エネルギーに関する変分問題を定式化した。さらに、等価なリーマン-ヒルベルト問題を考察した。これは、2次元シリンダー上の解析関数を求める問題になる。2つの無限遠点における境界条件と実軸上のカットの情報から解析関数を考察し、熱力学極限の解に現れる無分散可積分構造に関する理解を深めた。

(2) 外部ポテンシャルを入れたランダム平面分割の分配関数は戸田階層のタウ関数であることをすでに示してある。さらに、これを包含するエキゾチックな可積分構造が現れる可能性を調べた。高崎は、エキゾチックな可積分構造として、Ablowitz-Ladik 階層(相対論的戸田階層)が現れうることを示した。また、ランダム平面分割における量子トールス対称性、シフト対称性と行列値の量子多重対数関数の関わりを明らかにし、これを位相的弦理論のトポロジカルバーテックス鎖を探索するプレーンの波動関数の満たす q 差分系の記述に応用した。さらに、この結果を進めて、高崎と中津は、閉じたバーテックスの場合に探索プレーンの波動関数の満たす q 差分系を導いた。

(3) ランダム平面分割の分配関数は、4次元ゲージ理論における非可換インスタントンのモジュライ空間上のディラック作用素の同変指数と一致する。中津と浜中は、非可換インスタントンの再検討を行った。フォック空間上の ADHM 構成と逆構成に対して、正則化処方を用いる定式化を与えた。また、その完全性を示した。ディラック指数の局所化をみちびく群作用に関して一定の成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

高崎金久,

“Orbifold melting crystal model and reductions of Toda hierarchy,”
J. Phys. A: Math. Theor., 査読有,
Vol48, 2015, 215201,
doi:10.1088/1751-8113/48/21/215201.

高崎金久,

“Generalized Ablowitz-Ladik hierarchy in topological string theory,”
J. Phys.A: Math. Theor., 査読有,
Vol 47, 2014, 165201,
doi:10.1088/1751-8113/47/16/165201.

浜中真志, 中津了勇,

“非可換インスタントンの ADHM 構成法,”

九州大学応用力学研究所共同利用研究会
「非線形波動の拡がり」報告集, 査読有,
Vol 25A-S2, 2014, 21-28.

高崎金久,

`` Modified melting crystal model and
Ablowitz-Ladik hierarchy, ”
J. Phys. A: Math. Theor., 査読有,
Vol 46, 2013, 243202,
doi:10.1088/1751-8113/46/24/245202.

浜中真志, 中津了勇,

``Exact construction of non-commutative
instantons, ”
Frontiers of Math. in China, 査読有,
Vol 5, 2013, 1031-1046.
doi:10.1007/s11464-013-0281-2.

[学会発表](計 10 件)

高崎金久,

``Integrable structure of various melting
crystal models, ” in ``Curves, Moduli and
Integrable Systems, ” 2015 年 2 月 17 日 ~
19 日, 津田塾大学(東京都, 小平市).

高崎金久,

``溶解結晶模型の可積分構造, ”
研究集会「非線形数理モデルの諸相:連続,
離散, 超離散, その先」, 2014 年 8 月 6 日 ~
8 日, 九州大学マス・フォア・インダストリ
研究所(福岡県, 福岡市).

中津了勇,

``Gauge instantons in non-commutative
space, ” in 22th International Conference
on ``Integrable Systems and Quantum
Symmetries, ” 2014 年 6 月 23 日 ~ 29 日,
チェコ工科大学(プラハ, チェコ).

中津了勇,

``Integrable structure in melting crystal
models, ” in XXVI Workshop ``Beyond the
standard model, ” 2014 年 3 月 09 日 ~ 13 日,
Bad Honnef 物理学研究所(バドホネフ, ドイ
ツ).

高崎金久,

``Modified melting crystal model and
Ablowitz-Ladik hierarchy, ”
in ``Physics and Mathematics of Nonlinear
Phenomena, ” 2013 年 6 月 23 日 ~ 28 日,
(Gallipoli, イタリア).

高崎金久,

``溶解結晶模型と Ablowitz-Ladik 階層, ”
日本数学会年会, 2013 年 3 月 22 日 ~ 22 日,
京都大学(京都府, 京都市).

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

中津 了勇 (NAKATSU, toshio)
摂南大学・理工学部・教授
研究者番号 : 10281502

(2) 研究分担者

高崎 金久 (TAKASAKI, kanehisa)
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号 : 40171433