

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 27 日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540224

研究課題名(和文)非有界作用素環のクロス積と GW^* -代数の構造研究課題名(英文)Crossed products of algebras of unbounded operators and structure of GW^* -algebras

研究代表者

井上 淳 (INOUE, ATSUSHI)

福岡大学・理学部・非常勤講師

研究者番号：50078557

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：井上は海外共同研究者M. Fragoulopoulou(アテネ大)、K.D. Kuersten(ライプチヒ大)と共に、フォン・ノイマン代数の自然な非有界一般化である GW^* -代数のクロス積を定義し、その基本性質を調べた。その結果を利用して、type III の GW^* -代数がある自然な条件のもとでtype II の GW^* -代数のクロス積と同型になることを示した。

研究成果の概要(英文)：Inoue, M. Fragoulopoulou and K.D. Kuersten have defined and studied a GW^* -crossed product of a GW^* -algebra which is a natural generalization of a von Neumann algebra. Using the results, they have shown that a type III GW^* -algebra is isomorphic to a GW^* -crossed product of type II GW^* -algebra under natural assumptions.

研究分野：数物系科学

キーワード：非有界 $*$ -表現 0^* -代数 非可換微分構造

1. 研究開始当初の背景

フォン・ノイマン代数のクロス積の研究はフォン・ノイマン代数の構造の研究に重要な役割をしている。特に、M. Takesaki は type のフォン・ノイマン代数 M は富田・竹崎理論により定義される modular action の dual action による type のフォン・ノイマン代数のクロス積と同型であることを示した。このことにより type のフォン・ノイマン代数の研究がすすんだ。しかし、非有界作用素環に関するクロス積は“domain problem”等により今まで定義すらできていなかった。そこで、井上は海外共同研究者の M. Fragoulopoulou(アテネ大), K.D. Kuersten(パレルモ大)と非有界作用素環に関するクロス積の研究を始めた。特に、フォン・ノイマン代数の自然な非有界作用素環への一般化である GW^* -代数のクロス積を定義し、その基本性質を調べることにより GW^* -代数の構造を調べることを試みた。

2. 研究の目的

本研究の目的は非有界作用素環(O^* -代数, GW^* -代数, 部分 GW^* -代数)のクロス積についての研究をすすめ、それを GW^* -代数の構造の研究へ応用することである。ヒルベルト空間上の準閉作用素のつくる * -代数(O^* -代数), 特に、その O^* -代数のなかでフォン・ノイマン代数の自然な非有界一般化である GW^* -代数は純粋に数学的な立場だけでなく、量子物理への応用の面からも重要であり、多くの数学者、物理数学者により研究されている。もちろん、多くの未解決な問題がある。そのなかで非有界作用素環のクロス積はまだまだ全く研究されていなかった。次の段階(1)-(5)にそってその研究をすすめた。

- (1) M を O^* -代数, α を局所コンパクト群 G の M 上への action とするとき, $\{M, G, \alpha\}$ による O^* -クロス積 $M \rtimes_{\alpha} G$ を定義し、その性質を調べる。
- (2) M を GW^* -代数, α を spatial action とするとき, GW^* -クロス積 $M \rtimes_{\alpha} GW^*$ を定義し、その基本性質を調べる。特に、 G が可換のとき, $M \rtimes_{\alpha} GW^*$ の双対定理を調べる。
- (3) GW^* -代数 M に富田・竹崎理論が展開できるベクトル(標準ベクトル)が与えられたとき, modular action α が定義でき, GW^* -クロス積 $M \rtimes_{\alpha} GW^*$ (\mathbf{R} は実数体) が考えられる。この $M \rtimes_{\alpha} GW^*$ に対して次を考える。
 $M \rtimes_{\alpha} GW^*$ は faithful normal semifinite trace をもつか?
 M は $M \rtimes_{\alpha} GW^*$ の dual action による GW^* -クロス積と同型になるか?
- (4) GW^* -代数のクロス積の研究を GW^* -代数の構造の研究に応用し、フォン・ノイマン代数に対する竹崎の定理の一般化「type の GW^* -代数は modular action の dual action による type

の GW^* -代数の GW^* -クロス積と同型である」が成り立つかを考える。

- (5) 部分 GW^* -代数のクロス積を定義し、 GW^* -代数, 部分 GW^* -代数の構造の研究に応用する。

3. 研究の方法

井上は海外共同研究者 M. Fragoulopoulou(アテネ大), K.D. Kuesten(ライプチヒ大)と非有界作用素環のクロス積とその構造についての研究を次の研究方法で行った。それぞれが関連する論文を読み、電子メールで情報交換を行い共同研究をすすめた。また、 GW^* -代数のクロス積に関連する非有界作用素環について A. Helemski(モスクワ大), K. Schmuedgen(ライプチヒ大), J.P. Antoine(ルーバン・カソリック大), W. Karwowski(プロツラフ大), C. Trapani, F. Bagarello(パレルモ大), 黒瀬秀樹, 高倉真由美(福岡大), 廣島文生(九州大), 荻秀和(福岡工大)とセミナー, 談話会等を行い情報交換を行った。また、次のように我々はそれぞれの大学を訪れ, 討論し研究をすすめた。

平成 24 年度

井上は 8 月 17 日-8 月 27 日, ライプチヒ大を訪れ, Kuersten と共同研究をすすめた。

F. Bagarello は平成 24 年 5 月 25 日-6 月 14 日, J.P. Antoine と C. Trapani は平成 25 年 2 月 23 日-3 月 2 日, 福岡大学を訪れ井上と共同研究をすすめた。

平成 25 年

Fragoulopoulou, Helemski は 5 月 6 日-6 月 2 日, Kuersten は 9 月 11 日-10 月 8 日, Trapani は 9 月 21 日-10 月 3 日, Karwowski は 10 月 30 日-11 月 13 日, Schmuedgen は平成 26 年 3 月 1 日-3 月 30 日, 福岡大学を訪れ共同研究をすすめた。

井上は 11 月 20 日-11 月 30 日, パレルモ大を訪れ, Bagarello, Trapani と共同研究を進めた。

平成 26 年度

井上は 7 月 31 日-8 月 30 日, ライプチヒ大, プロツラフ大を訪れ, Kuersten, Karwowski と共同研究をすすめた。Bagarello, Trapani は 9 月 8 日-9 月 17 日, Alexander, Fragoulopoulou は 10 月 6 日-11 月 2 日, Kuersten は平成 27 年 3 月 16 日-3 月 31 日, 福岡大学を訪れ, 共同研究をすすめた。

平成 27 年度

井上は 8 月 29 日-9 月 12 日, ライプチヒ大を訪れ, Kuersten と共同研究をすすめた。

4. 研究成果

研究目的に述べた(1)-(5)に沿って研究成果を述べる。

- (1) 0^* -代数のクロス積を定義し, その commutant を調べた.
- (2) 0^* -代数のクロス積の commutant を用いて GW^* -代数のクロス積を定義し, その基本性質を調べた. 特に, GW^* -クロス積の双対定理の研究を行った. その研究をすすめるために, 井上は Fragoulopoulou と M. Weight(ケープタウン大)と GW^* -代数のテンソル積の研究をし, 次の結果を得た. 「 M を GW^* -代数, α を可換な局所コンパクト群 G の M 上の action とする. GW^* -クロス積 $M \times_{GW^*, \alpha} G$ の dual action による GW^* -クロス積が定義でき, ある自然な条件のもとで, それは M の bicommutant と $B(L^2(G))$ とによって定義される GW^* -テンソル積と同型である」.
- (3) modular action α による GW^* -クロス積に対して, ある自然な条件のもとで次の結果を得た.
 $M \times_{GW^*, \alpha} \mathbb{R}$ は type ∞ の GW^* -代数である. すなわち, それは faithful normal semifinite trace をもつ.
 GW^* -代数 M は $M \times_{GW^*, \alpha} \mathbb{R}$ の dual action による GW^* -クロス積と同型である.
- (4) GW^* -代数の構造について次の結果を得た. 「ある自然な条件のもとで type ∞ の GW^* -代数は type ∞ の GW^* -代数の modular action の dual action による GW^* -クロス積と同型である」
- (5) GW^* -代数のクロス積の研究, GW^* -代数の構造の研究はまだ多くの未解決な問題がある. それを少しずつ解決していくのが今後の研究である.

上の(3)で述べた結果で, $M \times_{GW^*, \alpha} \mathbb{R}$ は常に faithful normal trace をもつがその trace が semifinite であるかどうかはわからない. すなわち, $M \times_{GW^*, \alpha} \mathbb{R}$ は一般に type ∞ かどうかはわからない. この理由で我々は部分 GW^* -代数のクロス積を定義し, その性質を調べている. 特に, 部分 GW^* -クロス積 $M \times_{PGW^*, \alpha} \mathbb{R}$ が常に type ∞ となるかどうかを考えている. この部分 GW^* -代数のクロス積, 構造の研究は継続中である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

1. M. Fragoulopoulou, A. Inoue and K.D. Kürsten, Crossed products of algebras of unbounded operators. Banach J. Math. Anal., 査読有, 9 巻, 2015, 316-358.
DOI:10.15352/bjma/09-4-16

2. M. Fragoulopoulou, A. Inoue and M. Weigt, Tensor products of unbounded operator algebras. Rocky Mountain J. Math., 査読有, 44 巻, 2014, 895-912.
DOI:10.1213/RMJ-2014-44-3-895

3. A. Inoue and C. Trapani, Non-self-adjoint resolutions of the identity and associated operators. Complex Anal. Oper. Theory, 査読有, 8 巻, 2014, 1531-1546.
DOI:10.1007/s11785-014-0359-1

4. M. Fragoulopoulou, A. Inoue and M. Weigt, Tensor products of generalized B^* -algebras. J. Math. Anal. Appl., 査読有, 420 巻, 2014, 1787-1802.
DOI:10.1016/j.jmaa.2014.06.046

5. F. Bagarello, A. Inoue and C. Trapani, Non-self-adjoint Hamiltonians defined by Riesz bases. J. Math. Phys., 査読有, 55 巻, 2014, 033501, 12 pp.
DOI:10.1063/1.4866779

6. F. Bagarello, A. Inoue and C. Trapani, Weak commutation relations of unbounded operators: nonlinear extensions. J. Math. Phys., 査読有, 53 巻, 2012, 123510, 13 pp.
DOI:10.1063/1.4764863

7. F. Bagarello, A. Inoue and C. Trapani, Induced and reduced unbounded operator algebras. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 査読有, 191 巻, 2012, 285-292.
DOI:10.1007/s10231-010-0183-9

8. F. Bagarello, A. Inoue and C. Trapani,

Representable linear functionals on
partial \ast -algebras. Mediterr. J. Math.,
査読有, 9 卷, 2012, 153-163.
DOI:10.1007/s00009-011-0118-8

6 . 研究組織

(1)研究代表者

井上 淳 (INOUE ATSUSHI)

福岡大学・理学部・非常勤講師

研究者番号 : 50078557