

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 10 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540393

研究課題名(和文) 厳密解および場の理論を用いた臨界的2次元確率過程の研究

研究課題名(英文) Studies on two dimensional critical stochastic process by exactly solvable models and field theory

研究代表者

堺 和光 (Sakai, Kazumitsu)

東京大学・総合文化研究科・助教

研究者番号：10397028

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：ランダムフラクタルは臨界現象に普遍的に現れる幾何構造である。我々は、2次元臨界現象に現れるランダムフラクタルに対して、シュラム・レヴナー発展と呼ばれる発展方程式を用いてその構造の研究を行った。

さらに我々は「可解モデルと幾何学との関連」の研究も行った。その中で、ある種の可積分モデルが、代数多様体におけるK理論と呼ばれる概念と関連していることを見出した。

研究成果の概要(英文)：Random fractals are a geometric structure universally appearing in the critical phenomena. Applying the Schramm-Loewner evolution, we have investigated the structure of random fractals observed in the two dimensional critical phenomena.

Furthermore, some relation between solvable models and geometry has been studied. Namely, we have found that some integrable models are related to the K theory defined on complex manifolds.

研究分野：数理物理学

キーワード：確率過程 臨界現象 シュラム・レヴナー発展 共形場理論 可解モデル 可積分系 グロタンディーク多項式 K理論

## 1. 研究開始当初の背景

フラクタルは自然界のいたるところに現れる普遍的な幾何構造である。研究開始当初、2次元共形不変性を有するフラクタルが、シュラム・レヴナー発展(SLE)と呼ばれる2次元確率過程によって統一的に記述されることが理解されつつあり、現代確率論や数理解物理学の中心的課題のひとつとして活発に研究されて始めていた。

一方、臨界現象における共形不変性は古くから期待された概念であり、特に、2次元においては、共形変換の生成子は無限次元の代数をなし、理論に強い制約が課される。これにより2次元共形場理論(CFT)は、2次元での臨界現象を(ほぼ)完全に分類する非常に強力な理論となっている。研究開始当初、このCFTとSLEの対応が次第に明かされつつあり、SLEは共形場理論の幾何的な側面を体現するものとして捉え始められていた。この、CFT/SLE対応は、これまでのところ、一部分が明らかにされているのみで、内部自由度を有する多重SLEの構成法などはほとんど未解明であった。

## 2. 研究の目的

イジングスピンのなす境界線やアンダーソン転移における電子分布などは、臨界点において典型的なフラクタル曲線をなす。最近、2次元において、これらの曲線がシュラム・レヴナー発展(SLE)とよばれる方程式で統一的に記述されることがわかってきた。一方、2次元臨界現象を分類する理論として共形場理論(CFT)があり、可解模型の存在も無数に知られている。本研究の主目的は、これらSLEとCFTをつなぐ数理構造を解明し、さらに可解模型を利用して、これまで解析が困難であった2次元臨界現象の幾何構造の厳密な解析およびそれらの具体的物理系への応用を目指すものである。

例えば、臨界点上でのイジング模型の $+$ および $-$ スピンのなすドメイン境界線や、臨界密度におけるパーコレーションクラスターの境界線、ある種のランダムウォークの軌跡、さらにまた、アンダーソン転移に見られる電子分布などは、スケーリング極限において典型的なフラクタル曲線をなすことが知られている(一般的に、臨界現象で現れるフラクタル曲線は、臨界的な確率過程が描く軌跡と捉え直すことができる)。ところが、これらのフラクタル構造の厳密な解析は極めて困難であり、多くの場合、未解決問題として残されている。

一般的に、臨界点上では、系は局所的な回転やスケール変換といった共形変換に対する不変性を有することが広く期待される。驚くべきことに、共形変換が複素関数論と対応付けられる2次元においては、これらのフラクタル曲線が、シュラム・レヴナー発展

(SLE)と呼ばれる発展方程式によって、統一的に記述されることがわかってきた。SLEは1次元ブラウン運動を駆動関数とし、拡散係数に相当する $\kappa$ をパラメータとして持つ(以下SLEと書く)。特筆すべきは、SLEは、パラメータ $\kappa$ の値に応じて、本質的に異なる曲線を描き出すことである。例えば、 $\kappa=3$ はイジング模型のクラスター境界、 $\kappa=6$ は臨界パーコレーションに対応する。さらにまた、SLEと確率解析を組み合わせることにより、個々の系を直接的に扱ったのでは得ることが困難な、曲線の交叉確率(ある点から出発した曲線がある境界の指定されたドメインに到達する確率)や、フラクタル次元( $df=1+\frac{\kappa-6}{2\kappa}$ )などが厳密に計算される。

一方、臨界現象における共形不変性は古くから期待された概念である。特に、2次元においては、共形変換の生成子は無限次元の代数をなし、理論に強い制約が課される。これにより2次元共形場理論(CFT)は、2次元での臨界現象を(ほぼ)完全に分類する非常に強力な理論となっている。最近、このCFTとSLEの対応が次第に明かされつつあり、SLEは共形場理論の幾何的な側面を体現するものとして捉えることができるようになってきた。このことは、2次元臨界現象の幾何的側面であるフラクタル構造が、CFTとSLEの対応から代数的に分類されうる可能性を強く示唆する。さらに、2次元においては、可解格子模型(厳密に解ける模型)の存在も無数に知られ、CFTとの対応も系統的に理解されている。この事実により、CFT/SLEの対応が理解されるならば、CFT/可解模型の対応を通して、可解模型から系統的に2次元確率過程を構成できることになる。

本研究は、以上の示唆を踏まえ、CFT、SLE、そして可解模型を組み合わせることにより2次元臨界現象の幾何的構造の解明を目的とする。

## 3. 研究の方法

本研究課題は、共形場理論(CFT)、可解格子模型およびシュラム・レヴナー発展(SLE)を組み合わせることにより、2次元臨界現象の幾何的構造を数理的に研究するものである。具体的に、(1)リー環対称性を有する多重SLEの構成と、その具体的応用。(2)コセットCFTに対応する多重SLEの構成と、その具体的応用を目指す。さらに、(3)可解模型の背後に潜む数理構造の探求を目指すものである。

具体的な方法として、まず、(1)、(2)では対応するCFTの構造と無矛盾になるように、SLEの駆動関数であるブラウン運動に制限を課す。さらに、分配関数の満たす偏微分方程式を解析することにより、臨界点におけるクラスター交叉確率を厳密に求める。

(3)では、可積分系の波動関数を構成することによって、その数理構造の解明を行う。

#### 4. 研究成果

##### (1) リー環対称性を有する多重 SLE と交叉確率

我々は SLE に対して、「スピン」に相当する内部対称性を付随させることに成功し、対応する共形場理論 (Wess-Zumino-Witten ; WZW 模型) との対応を定式化した。とくに、複数の SLE 曲線の配置に関するトポロジーと統計力学における分配関数の関係を論じ、それらが一対一対応の関係にあることを見抜いた。さらに、これらの相関関数が満たす偏微分方程式を厳密に解くことにより、この系のクラスターの交叉確率 (クラスターがある境界からある境界へ浸透する確率) を初めて厳密に導出した。WZW 模型は、6 頂点模型 (氷の模型、誘電体の模型) などのよく知られた統計力学模型の臨界現象を幅広く含む模型であり、我々の定式化は、これらの模型の臨界現象の幾何学的研究の基礎を与えるものとする。

##### (2) コセット構成された CFT との対応する多重 SLE の定式化

SLE をコセット構成された CFT に拡張した。(1) の研究を掘り下げ、コセット構成された WZW 模型での多重 SLE について研究を行い、臨界点においてコセット CFT で記述される模型のランダムフラクタルを生成する SLE を定式化した。さらに、具体的応用として、 $Z(N)$  パラフェルミオン模型の交叉確率の厳密解を得た。この研究によって、系の局所的なランダムフラクタルの振る舞い (フラクタル次元等) は同一でも、大域的な振る舞い (交叉確率等) は異なる場合があるという著しい性質を見出している。

##### (3) 可解模型と幾何学

可解な確率過程模型の背後に潜む数学構造を調べているなか、あるクラスの量子可積分系と K 理論との対応を発見した。

シューア多項式に代表される対称多項式は、表現論など数学の研究対象のみならず、ソリトン理論、共形場理論、確率過程等々、数理物理に頻りに登場する。グロタンディーク多項式は、シューア多項式を一変数一般化した対称多項式であり、元々は代数多様体における K 理論と呼ばれる枠組みの中で導入されたものである。すなわち旗多様体のグロタンディーク環におけるシューベルト類の多項式表示として導入される。

我々は、このグロタンディーク多項式と、可解模型の関係性について議論した。即ち、5 頂点模型の波動関数をひとつの行列式によって表現することに成功し、この行列式表示が、グロタンディーク多項式と一致するこ

とを発見した。さらに波動関数の完全性関係式などを用いることによって、グロタンディーク多項式の満たすコーシー恒等式等、直交関係式の明示式や表現論的に重要な幾つもの明示式を、その物理的解釈のもと厳密に導出した。また、我々は、この研究を非エルミート phase 模型の場合に拡張した。すなわち、この模型の波動関数も同じくグロタンディーク多項式で表わされることを示し、K 理論的なボソン・フェルミオンの対応を発見した。

また、これらの理論の全く異なる方面への応用として、ある種の 3 次元溶解結晶模型を構築し、その分配関数を厳密に計算した。3 次元溶解結晶模型は、3 次元のヤング図とみなすことができ、この 3 次元ヤング図は自然数の平面分割の 3 次元で表したものとみなすことができる。我々は、グロタンディーク多項式に成立するコーシー恒等式を用いることによって、この 3 次元溶解結晶模型の分配関数を厳密に計算することに成功した。この分配関数は MacMahon 関数と呼ばれる、自然数の平面分割の生成母関数を与える関数の一般化となっている。

この研究をさらに推進させ、量子可積分系の観点から、対称多項式のひとつであるシューア関数の新たな組合せ論的な公式を発見した。さらに、Felderhof 模型と呼ばれる可解模型と factorial シューア関数および symplectic シューア関数との新たな対応関係を見出した。

##### (4) 非対称単純排他過程の動的性質

完全非対称単純排他過程 (TASEP) とよばれる 1 次元非平衡系模型の研究を行った。非対称単純排他過程は、交通流の渋滞、粒子流の停滞などの渋滞の模型、さらには RNA 上の酵素による蛋白の合成に関して幅広く応用される模型のひとつである。我々はベータ仮説を用いて、TASEP の緩和ダイナミクスの厳密解を求めることに成功した。とくに、これまで未解明であった局所密度の振幅のスケール指数は  $-3/2$ 、対して、カレントのそれは  $-1$  となることを初めて明らかにした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

1 K. Motegi and K. Sakai, Quantum integrable combinatorics of Schur polynomials, arXiv:1507.06740 (2015) 査読無

2 K. Motegi, K. Sakai, S. Watanabe, Partition functions of integrable lattice models and combinatorics of symmetric polynomials, arXiv:1512.07955 (2015) 査読無

- 3 K. Motegi, Nonstandard representations of type C affine Hecke algebra from K-operators, Lett. Math. Phys. 105 (2015) 1165-1192 査読有
- 4 K. Motegi and K. Sakai, K-theoretic boson-fermion correspondence and melting crystals, J. Phys. A: Math. Theor. 47 (2014) 445202 査読有
- 5 M. Hyuga, S. Sugiura, K. Sakai and A. Shimizu, Phys. Rev. B 90 (2014) 121110(R) 査読有
- 6 K. Motegi and K. Sakai, Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 355201 査読有
- 7 K. Motegi, On Baxter's Q operator of the higher spin XXZ chain at the Razumov-Stroganov point, J. Phys. A: Math. Theor. 54 (2013) 063510 査読有
- 8 K. Sakai, Multiple Schramm-Loewner evolutions for conformal field theories with Lie algebra symmetries, Nucl. Phys. B 867 (2013) 429-447 査読有
- 9 K. Motegi, Absence of finite size correction at the combinatorial point of the integrable higher spin XXZ chain Kohei Motegi, arXiv:1301.6311 (2013) 査読無
- 10 K. Motegi, K. Sakai and J. Sato, Long time asymptotics of the totally asymmetric simple exclusion process, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 465004 査読有
- 11 K. Motegi, K. Sakai and J. Sato, Exact Relaxation Dynamics in the Totally Asymmetric Simple Exclusion Process, Phys. Rev. E 85 (2012) 042105 査読有

[学会発表](計20件)

- 1 K. Sakai, Multiple SLEs, Infinite Analysis 16 New Developments in Integrable Systems (招待講演), 2016年03月24日, 大阪大学(大阪府, 大阪市)
- 2 堺和光, 共形不変性を有するランダムフラクタルの合成則, 日本物理学会 2015年秋季大会, 2015年09月16日, 関西大学(大阪府, 吹田市)

3 K. Sakai, JSPS Japan-Hungary Research Cooperative Program Workshop on "Integrability in gauge-gravity duality and strong coupling dynamics of gauge theory"(招待講演), 2014年09月23日, 京都大学(京都府, 京都市)

4 堺和光, 古山敦之, 量子ハイゼンベルク模型における量子的ソリトン, 日本物理学会 2014年秋季大会, 2014年09月09日, 中部大学(愛知県, 名古屋市)

5 日向理彦, 杉浦祥, 堺和光, 清水明, グランドカノニカル TPQ 状態とカノニカル TPQ 状態の比較, 日本物理学会 2014年秋季大会, 2014年09月09日, 中部大学(愛知県, 名古屋市)

6 茂木康平, 堺和光, 量子可積分系と Grothendieck 多項式(1): ボソン・フェルミオン対応, 日本物理学会 第69回年次大会, 2014年03月27日, 東海大学(神奈川県, 横浜市)

7 茂木康平, 堺和光, 量子可積分系と Grothendieck 多項式(2): 溶解結晶模型と平面分割, 日本物理学会 第69回年次大会, 2014年03月27日, 東海大学(神奈川県, 横浜市)

8 日向理彦, 杉浦祥, 堺和光, 清水明, 熱的な量子純粋状態による Fermion 系の数値解析, 日本物理学会 第69回年次大会, 2014年03月27日, 東海大学(神奈川県, 横浜市)

9 茂木康平, 堺和光, 可解格子模型と Grothendieck 多項式, 日本数学会 2014年度年会, 2014年03月18日, 学習院大学(東京都, 豊島区)

10 K. Motegi, Quantum integrable models and Grothendieck polynomials, Infinite Analysis 14: New Perspectives in Integrable Systems and Representation Theory (招待講演), 2014年03月04日, 東京大学(東京都, 目黒区)

11 茂木康平, 堺和光, Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials, 日本物理学会 2013年秋季大会, 2013年09月26日, 徳島大学(徳島県, 徳島市)

12 茂木康平, XXZ 鎖の Razumov-Stroganov 点における Baxter の Q 演算子, 日本物理学会 2013年秋季大会, 2013年09月26日, 徳島大学(徳島県, 徳島市)

13 K. Motegi, Stochastic integrable models and Grothendieck polynomials, A satellite meeting of STATPHYS 25 (2013) and a YITP workshop. Mathematical

Statistical Physics, 2013年08月01日, 京都大学(京都府, 京都市)

14 K. Sakai, Multiple Schramm-Loewner evolutions for conformal field theories with Lie algebra symmetries, The IUPAP 25th, International Conference on Statistical Physics (STATPHYS 25), 2013年07月26日, ソウル国立大学(韓国, ソウル)

15 K. Motegi, Quantum inverse scattering approach to the totally asymmetric simple exclusion process (STATPHYS 25), 2013年07月22日, ソウル国立大学(韓国, ソウル)

16 茂木康平, 堺和光, 佐藤純, 周期 TASEP の長時間における漸近的振る舞い, 日本物理学会 第68回年次大会, 2013年03月26日, 広島大学(広島県, 東広島市)

17 茂木康平, 堺和光, 佐藤純, 量子逆散乱法による完全非対称単純排他過程の解析, 日本数学会 2013年年会, 2013年03月23日, 京都大学(京都府, 京都市)

18 堺和光, 多重 Stochastic Loewner Evolution に関して, 日本物理学会 2012年秋季大会, 2012年09月19日, 横浜国立大学(神奈川県, 横浜市)

19 K. Motegi, Exact relaxation dynamics in the totally asymmetric simple exclusion process, Recent Advances in Quantum Integrable Systems (Raquis'12), 2012年09月13日, Angers 大学(フランス, アンジェ)

20 K. Sakai, Multiple Schramm-Loewner evolutions for conformal field theories with Lie algebra symmetries, Recent Advances in Quantum Integrable Systems (Raquis'12), 2012年09月11日, Angers 大学(フランス, アンジェ)

[その他]

ホームページ等

<http://researchmap.jp/kazumitsu-sakai>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

堺 和光 (SAKAI, Kazumitsu)

東京大学・大学院総合文化研究科・助教

研究者番号: 10397028