2版

様　式　Ｃ−１９、Ｆ−１９、Ｚ−１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５１１８４
研究課題名（和文）通信タイミングを災害時も確実に同期させる自律分散的な基礎原理

研究課題名（英文）Synchronization of spatially distributed oscillators

研究代表者
田中　琢真（Tanaka，Takuma）

東京工業大学・総合理工学研究科（研究院）・助教

研究者番号：４０５２６２２４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：当初，空間的に離れた場所に散らばったクロックを同期させるための基礎原理を研究していた．しかしこのモデルには実装上の問題があることがわかったため，集団運動の解けるモデルの研究に移った．球面上に多数の粒子があり、それぞれが固有の軸に沿って固有の速度で回転しながら引力を及ぼし合っているモデルを構築した．このモデルは性質の異なる粒子の集団で構成されているが，重心の運動は単純な方程式で記述されることがわかった．

研究成果の概要（英文）：Although I initially investigated a method to synchronize spatially distributed oscillators, it was found to be difficult to implement this method in real systems. Thus, I next attempted to develop an analytically tractable model of mutually interacting particles. The model consists of mutually interacting particles on an M-dimensional unit sphere. Particles rotate on the sphere when no force is exerted on them and are attracted to each other. I found that the motion of the center of mass of an infinite number of particles can be described by an M-dimensional ordinary differential equation even if particles have different speeds of rotation.

研究分野：非線形科学

キーワード：位相振動子　力学系　集団運動

１．研究開始当初の背景

技術の進歩によって，ロボットが工場など限られた場面に止まらず，社会の中で広く日常的に使われるようになる時代が来ようとしている．高齢化の進行にともなって，ロボットの社会的なニーズも高まっている．ロボットは災害時の救助・復旧作業への利用も考えられる．今後必要となり普及すると考えられるのは自律分散的なロボットである．災害時にはインフラが破壊されているため，集中管理方式は使えない可能性が高い．ロボットの各個体が各自に情報を収集し，相互に通信・連絡しながら協調して動作しなければならない．

このとき，通信を行うためには，通信タイミングをそろえる必要がある．タイミングの同期を振動子で実現する研究に Tanaka, H. *et al. IEICE Electronic Express* **6**(22) 1562–1568 (2009)などがある．このような状況では，方々に散らばって作業しているロボットは空間上に分布した振動子としてモデル化される．空間上の振動子が相互作用によってどのように同期を達成するかは以前から研究されている．先行研究で明らかになっているのは，しばしば振動の螺旋波が出現して，空間上に分布した振動子が全体としては同期できなくなってしまうことである．螺旋波は安定であるため，長時間待っても同期を達成できないのである．

そこで，振動子の相互作用に螺旋波を消すような要素を入れて，全同期を達成することができるようなモデルを構築すれば通信の同期を達成する技術への応用が可能なのではないかと考えた．空間に分布した振動子のモデルとしては complex Ginzburg–Landau (CGL)方程式を考え，局所相互作用にあたる空間微分の項を変更することにした．CGL 方程式では振動子の密度は一様だと考えるが，振動子の密度が非一様である場合を考え，振動の伝わり方が密度に依存するとし，さらに振動波の進行方向にそって振動子が運動する（ロボットが移動する）とした．ダイナミクスは

$$\frac{\partial A}{\partial t} = (1 - \mathrm{i}c_0)A + (1 + ic_1)\nabla\rho A - (1 + ic_2)|A|^2 A - \mathbf{v}\cdot\nabla A,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}),$$

$$\mathbf{v} = c_3\begin{bmatrix} u\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - v\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \\ u\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) - v\frac{\partial}{\partial y}(\rho u) \end{bmatrix}$$

で与えられる．ただし，$A = u + \mathrm{i}v$ が振動を表し，ρ が密度である．このようにすると，あるパラメタの範囲では螺旋波や進行波が不安定化し，一様振動が出現することがわかった．

しかし，モデルの詳細な検討を続ける中で，相互作用の入り方が特殊で，相互作用するロボットとしての解釈は困難であることが明らかになり，通信の同期化への応用は困難だという結論に達した．そこで，ここまでの研究で調査した振動子系の先行研究を使って，非線形力学系の研究へ方向転換することにした．

２．研究の目的

Ott & Antonsen (2008)は位相のダイナミクスが

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\varphi_j - \varphi_i - \alpha)$$

で与えられ，自然振動数 ω_i がローレンツ分布

$$p(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$

に従う位相振動子の集団運動が Stuart–Landau 方程式で記述されることを示した．具体的には，振動子の同期度を表すオーダーパラメタ

$$r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\exp(\mathrm{i}\varphi_i)$$

が

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(K\cos\alpha - 2\gamma - \mathrm{i}K\sin\alpha)r - \frac{K}{2}\exp(\mathrm{i}\alpha)|r|^2 r$$

という微分方程式に従うことを示した．この結果は

(1) 非一様な性質を持つ要素の集団ダイナミクスが低次元力学系によって記述される
(2) 振動子が無限個ある場合，特殊な初期値から出発するならばこの解は近似解ではなく厳密解である

という二つの意味で注目すべき結果である．多様な要素を含む系の集団運動が低次元の力学系で書けるならば，集団運動を完全な形で「理解できる」ことになる．ほかにこのような例は報告されておらず，もしこの結果を拡張できるならば力学系，特に多数の要素が相互作用して集団を作る系についての理解が飛躍的に進むと考えた．そこで，この系の拡張を行うこととした．

３．研究の方法

Ott & Antonsen (2008)以前に Watanabe & Strogatz (1994)は自然振動数が一様な位相振動子の集団に sine coupling による一様な外力がかかる場合，系が何個の振動子を含んでいても，ダイナミクスは 3 変数の力学系で表されることを示した．Goebel (1995)は，このような低次元力学系で系が記述できるのは，sine coupling の働く位相振動子のダイナミクスは Möbius 変換で与えられるからで

あることを明らかにした．

ここに Ott & Antonsen (2008)の結果を拡張する鍵があると考えた．Möbius 変換は一変数の射影変換の特殊例である．一般の射影変換に拡張すれば，位相振動子系以外にも類似の結果を拡張できるはずである．さらに，このダイナミクスをすべての自然振動数について積分すれば Ott & Antonsen (2008)の結果に対応するものを得られると考えた（図 1）．

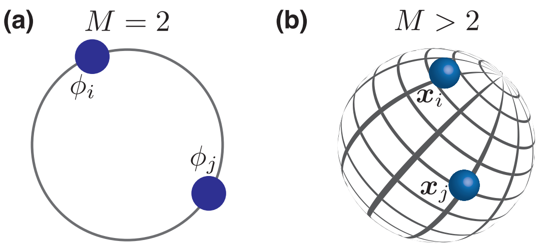

図 1　二次元空間の円周上にある位相振動子(a)と，高次元空間の球面上にある粒子(b).

4．研究成果

このような考えに基づき，まずパラメタが時刻に依存する射影変換

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}}{\mathbf{c}^*\mathbf{x}_0 + d}$$

を初期位置 $\mathbf{x}_0$ に施すことによって現在位置が与えられるような粒子のダイナミクスを微分方程式で書き表し，行列リッカチ方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\mathbf{h}^*\mathbf{x} + \Omega\mathbf{x} + \mathbf{g}$$

を得た. Sine coupling を持つ位相振動子は，リッカチ方程式で $\mathbf{x}$ が二次元平面の単位円の上に軌道が制限されている場合に対応する. そこで, 高次元の場合についても同様に，単位球面・単位超球面上に軌道を制限したところ，粒子は特定の軸の周りに特定の角振動数で回転し，粒子に作用する力はバネのような距離に比例する力（球面上への拘束があるので接線方向の分力のみが実際には作用する）と解釈できる力学系になることがわかった（図 2）.

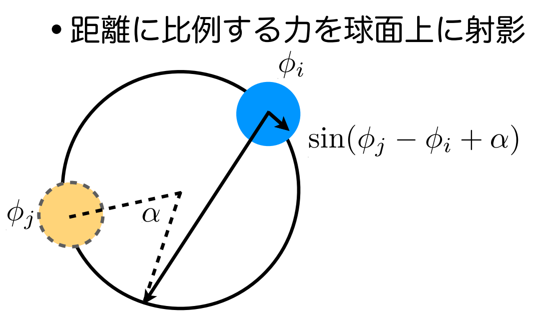

図 2　位相振動子と本研究の球面上の粒子はバネのような距離に比例する力で相互作用していると解釈できる.

自然振動数が一様な振動子が初期に球面上に一様に分布し，同一の外力を受けた場合，振動子の重心は単一のリッカチ方程式に従う．そのため，多数の粒子を含むダイナミクスが少数自由度の力学系で記述できることになる．さらに，振動数が一様でない場合も，特殊な分布に従う場合には振動子集団全体の重心を求めることができて，Ott & Antonsen (2008)に対応する結果が得られることがわかった．結果的に Stuart–Landau 方程式を高次元拡張したもの

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -\mathbf{r}(t)[\mathbf{K}(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{f}(t)]^*\mathbf{r}(t) + \hat{\Omega}\mathbf{r}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{r}(t) + \mathbf{f}(t)$$

になった．この解析的に導出した結果は数値計算ときわめてよく一致することを確認した（図 3）.

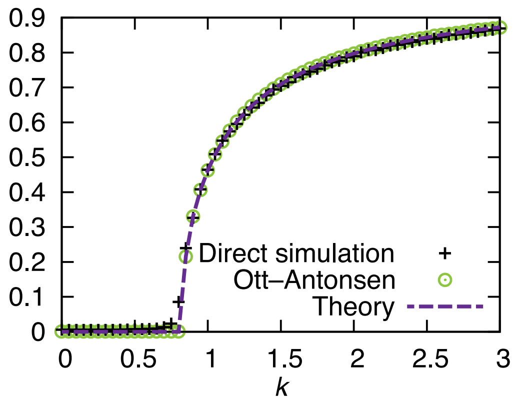

図 3　多体系シミュレーションと理論解の比較．多体系のシミュレーションが十字，Stuart-Landau 方程式の高次元拡張が緑丸，この方程式の解析解が鎖線で示されている.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）

(1) *Fujiwara, K., Tanaka, T. & Nakamura, K. Invariant Multiparameter Sensitivity to Characterize Dynamical Systems on Complex Networks. *J. Phys. Soc. Japan* **84**, 024002 (2015). doi:10.7566/JPSJ.84.024002 査読あり

(2) Fujiwara, K., Tanaka, T. & Nakamura, K. Invariant Multiparameter Sensitivity of Oscillator Network. *ICONIP 2014, Part I, LNCS* **8834**, 183-190 (2014). doi:10.1007/978-3-319-12637-1_23 査読あり

(3) *Tanaka, T. Solvable model of the collective motion of heterogeneous particles interacting on a sphere.

New J. Phys. **16**, 023016 (2014).
doi:10.1088/1367-2630/16/2/023016
査読あり

〔学会発表〕（計 1 件）

(1) 球面上で相互作用する粒子の集団運動, 田中琢真, 日本物理学会 2013 年秋期大会, 2013 年 9 月 26 日, 徳島大学（徳島市）.

〔図書〕（計 0 件）
なし

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
なし

○取得状況（計 0 件）
なし

〔その他〕
研究機関の個人ページは
http://www.brn.dis.titech.ac.jp/~ttakuma/
にあり,
http://www.brn.dis.titech.ac.jp/~ttakuma/demo_sphere.html
に本研究に関係するデモンストレーションがある.

６．研究組織
(1)研究代表者
田中　琢真(TANAKA, Takuma)
東京工業大学・大学院総合理工学研究科・助教
研究者番号：40526224

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし