

平成 26 年 5 月 15 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2013

課題番号：24654033

研究課題名(和文)非局所偏微分方程式における de Giorgi-Nash-Moser 理論の構築

研究課題名(英文)Towards de Giorgi-Nash-Moser theory on non-linear non-local partial differential equations.

研究代表者

熊谷 隆 (Kumagai, Takashi)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：90234509

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000 円、(間接経費) 870,000 円

研究成果の概要(和文)：非局所偏微分方程式や対応する飛躍型確率過程に関する de Giorgi-Nash-Moser 理論や解の priori 評価の現状と手法の整理し、様々なモデルの解析に用いた。測度付き距離空間の上の広い範疇の飛躍型確率過程(非局所偏微分方程式)について、境界 Harnack 不等式が成立するための十分条件を与え具体的な非局所方程式に応用した。また、fractional time derivative heat equation の熱核に関する研究を行った。

研究成果の概要(英文)：We investigated recently developed methods on the de Giorgi-Nash-Moser theory and a priori estimates of caloric functions for non-local operators and jump-type stochastic processes. We gave some sufficient conditions for the boundary Harnack inequalities to hold for jump-type processes (non-local operators) on general metric measure spaces, and applied the results to various concrete examples. We also worked on heat kernel estimates for fractional time derivative heat equations.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非局所偏微分方程式 確率論 解析学 飛躍型確率過程 国際研究者交流 フィンランド：韓国：ポーランド：アメリカ

1. 研究開始当初の背景

近年、非局所偏微分方程式の解や対応する飛躍型確率過程について、そのアприオリ評価、熱核の精密な評価に関する研究が急速に進んでいる。確率論を用いたアプローチは、Bass-Levin (2002)や Chen-Kumagai (2003)に端を発し、安定過程の摂動や、相対論的安定過程の摂動など、応用上重要な飛躍型過程を含む広い範疇で、詳しいアприオリ評価が知られるようになった。この手法の特徴は、拡散過程の場合の divergence form の理論のように、作用素の係数の滑らかさを全く必要としない点にある(擬微分作用素によるアプローチでは、熱核評価のためにはシンボルにある程度の regularity を仮定する必要があることに注意)。一方、C. Villani 氏 (2010 年フィールズ賞受賞者)らがやっている、クーロン力という非局所な相互作用のある系における非線形ポルツマン方程式の研究などを見ると、非線形非局所偏微分方程式の解に関する (de Giorgi-Nash-Moser 流の)アприオリ評価の理論の必要性、有用性が見て取れる。本研究は、このような背景の下より高い見地から非線形非局所偏微分方程式の解析を進めるために開始された。

2. 研究の目的

本研究の究極の目標は、近年著しい発展を遂げている非局所偏微分方程式や対応する飛躍型確率過程に関する de Giorgi-Nash-Moser 理論を、非線形のレベルに拡張する事である。この目標は壮大であるので、目標に向けた以下の3つのステップで研究をすすめていった。

- (i) 線形非局所偏微分方程式の摂動安定性理論の展開
- (ii) 非線形(局所)偏微分方程式の解のアприオリ評価の現状と手法の整理
- (iii) 具体的な方程式を通じた、非線形非局所偏微分方程式の解のアприオリ評価への試み

3. 研究の方法

非線形偏微分方程式の調和解析について深い造詣を持つ石毛和弘氏を分担者に迎え、非局所作用素と非線形偏微分方程式の専門家からなる海外共同研究者 (Barlow 教授、Chen 教授、Grigor'yan 教授、Kinnunen 教授)を加え、相互訪問や研究会を通じて当該問題に関する共通理解を深め研究を進める事とした。さらに国際研究集会への出席・講演を通じて、広く関連分野の動向を探ることで、偏微分方程式の解のアприオリ評価の現状と手法の整理した。特にコアとなったのが、2012年7月に Bielefeld 大学で開かれた国際研究集会 Non-local Operators: Analysis, Probability, Geometry and Applications と 2013

年9-12月に Mittag-Leffler 研究所で行われたプログラム Evolutionary Problems である。(前者の研究集会は、代表者の熊谷が学術委員として運営にも関わった。)これらの研究集会で広い意味での当該研究の現状を把握し、研究者と交流を深めたことが、本研究課題の推進に大きなプラスとなった。

4. 研究成果

(1) 総括

分担者・海外共同研究者との連携により、局所・非局所偏微分方程式の解のアприオリ評価の現状と手法の整理し、研究集会などを通じて研究交流の幅を大きく広げる事が出来た。非局所確率過程、非局所偏微分方程式の観点からは、境界 Harnack 不等式が成立するための十分条件として統一的な結果を導き、様々なモデルに応用できた点が大きな進展であった。この他、研究を遂行する中で異常拡散をキーワードとした研究グループとの交流を持つ事ができ、土壌汚染や大気汚染など数々の現実の問題への当該研究の応用の可能性を見る事が出来た事は、研究開始当初予期していなかった収穫である。このような研究交流に触発され、fractional time derivative heat equation の熱核に関する研究を進めており、確率論的手法を用いて、先行研究では到達できない成果を出す事が期待できる状況にある。この研究は別経費を用いて継続し、論文にまとめあげるように努める予定である。

本研究の成果の多くは国際的に評価の高い雑誌に掲載され(あるいは掲載予定であり)、代表者・分担者が国内外の多くの研究集会で講演する事により、本研究の成果を関連分野研究者に伝え、議論を通じて深化させる事ができた。残念ながら最終目標である非線形非局所偏微分方程式の解のアприオリ評価については、論文にまとめる形での具体的な成果には至らなかったが、本研究を通じていくつかの新しいアプローチを身につける事ができたので、今後の課題として継続的に研究を進めたいと考えている。以下、代表者、分担者、連携研究者それぞれの主な研究成果を具体的に記す。

(2) 熊谷 隆

1 一般の測度付き距離空間の上の広い範疇の飛躍型確率過程(非局所偏微分方程式)について、境界 Harnack 不等式が成り立つための十分条件を与えた。この条件は様々な例でチェック可能であり、論文では、例えばブラウン運動の subordination や Levy 過程(局所部分がついていてもよい)、stable-like 過程、フラクタル上の飛躍型確率過程、Schrödinger 方程式の解、ドリフト付きの飛躍型確率過程など多様な具体例で境界 Harnack 不等式を証明した(本論文で初めて証明された例も多く含む)。この条件は摂動

安定性を持った条件ではないが、幅広い範疇で境界 Harnack 不等式の証明を統一的に与えるという意味で当該研究に大きな進展をもたらす結果であると考えている。(K. Bogdan 氏、M. Kwaśnicki 氏との共同研究であり、論文は雑誌に accept された。)

2 Fractional time derivative heat equation の熱核に関する研究を行った。空間微分の作用素が divergence form 等の場合には、偏微分方程式の研究者らによる様々な先行結果があるが、空間が irregular な場合や作用素が非局所な場合には、ほとんど結果がないのが現状である。我々は fractional time derivative 部分を拡散過程の inverse stable subordination などによる時間変更だと捉える確率論的視点からこれを解析し、幅広い operator について熱核の評価を行うことが出来る見通しを立てた。Poisson 方程式の解の存在など、関連する解析を整備する必要があり、これらについての先行研究の調査などに時間がかかり、厳密な結果を出す途中段階で時間切れになってしまったが、引き続き当該研究を推進し、論文にまとめることを目指す。本研究は Z.Q. Chen 氏、P. Kim 氏との共同研究である。

(3) 石毛和弘

半線形発展方程式や非線形楕円型方程式に関する研究を進め、de Giorgi-Nash-Moser 理論などによる解のアプリオリ評価を武器としたさらなる解析を展開した。

1 動的境界条件を含む非線形楕円型方程式について考察し、楕円型方程式論で用いられる非局所的評価を駆使し、大域解の存在および非存在に関する臨界指数を求めた。さらに、その大域解がポアソン核のように時間無限大で振る舞うことを証明した。(M. Fila 氏、T. Kawakami 氏との共同研究であり、論文は最近雑誌に掲載された。)

2 半線形発展方程式の時間大域解の多くは線形項から決まるある積分核に時間無限大で収束するが、その収束のノルムおよび早さについて解析し、また、高次漸近解析を行う理論の構築を行った。これらの解析には、de Giorgi-Nash-Moser 理論などによる解の先験的評価が有効であった。この他、熱方程式等に対して放物型凸性の概念を導入し、その有用性を示した。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)すべて査読有り

1 K. Bogdan, T. Kumagai and M. Kwaśnicki, Boundary Harnack inequality for Markov processes with jumps. Trans. Amer. Math. Soc., to appear.
<http://www.ams.org/cgi-bin/mstrack/acce>

pted_papers/tran

2 Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, Discrete Approximation of Symmetric Jump Processes on Metric Measure Spaces, Probab. Theory Relat. Fields 155 (2013), 703--749. DOI: 10.1007/s00440-012-0411-x

3 T. Kumagai and Zeitouni, Fluctuations of recentered maxima of discrete Gaussian Free Fields on a class of recurrent graphs. Electron. Commun. Probab., 18 (2013), 1-12. DOI: 10.1214/ECP.v18-2632

4 N. Ioku, K. Ishige, and E. Yanagida, Sharp decay estimates of L^q norms of nonnegative Schrödinger heat semigroups, J. Funct. Anal., 264 (2013), 2764-2783. DOI: 10.1016/j.jfa.2013.03.009

5 M. Fila, K. Ishige, and T. Kawakami, Large time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, Asymptot. Anal. 85 (2013), 107-123. DOI: 10.3233/ASY-131183

6 K. Ishige and T. Kawakami, Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations, J. Anal. Math., 121 (2013), 317-351. DOI: 10.1007/s11854-013-0038-6

7 M.T. Barlow, A. Grigor'yan and T. Kumagai, On the equivalence of parabolic Harnack inequalities and heat kernel estimates, J. Math. Soc. Japan, 64 (2012), 1091-1146. DOI: 10.2969/jmsj/06441091

8 K. Ishige and Y. Kabeya, L^p norms of nonnegative Schrodinger heat semigroup and the large time behavior of hot spots, J. Funct. Anal. 262 (2012), 2695-2733. DOI: 10.1016/j.jfa.2011.12.024

[学会発表](計 9 件)

1 熊谷隆, 複雑な系の上の確率過程：フラクタルからランダムメディアへ, RIMS 研究会「確率解析」, 2014 年 3 月 19 日, 数理解析研究所, 招待講演

2 熊谷隆, On the precise Gaussian heat kernel lower bounds, Evolutionary problems, 2013 年 10 月 13 日, Mittag-Leffler Institute (Sweden), 招待講演

3 石毛和弘, Parabolic power concavity and parabolic boundary value problems, Equadiff 2013, 2013 年 8 月 26 日, Charles University, Prague, 招待講演

4 熊谷隆, Fluctuations of recentered maxima of discrete Gaussian Free Fields on a class of recurrent graphs, AMC 2013 in BEXCO, 2013 年 7 月 1 日, BEXCO, 釜山(韓国), 招待講演

5 熊谷隆, On the precise Gaussian heat kernel lower bounds, IWPT2013 at Sapporo,

2013年02月04日, 北海道大学, 招待講演
6 熊谷隆, Fluctuations of recentered maxima of discrete Gaussian Free Fields on a class of recurrent graphs, 2012Advances on fractals and related topics at CUHK, 2012年12月12日, 香港中文大学(香港), 招待講演

7 熊谷隆, Random walks on disordered media and their scaling limits, 日本数学会、KMS-MSJ Joint Meeting 2012, 2012年09月17日, 九州大学, 招待講演

8 石毛和弘, Blow-up set for type I blowing up solutions for a semilinear heat equation 5th Euro-Japanese Workshop on Blow-up 2012 年09月12日, Centre International de Recontres Mathematiques (Luminy, France), 招待講演

9 石毛和弘, Sharp decay estimates of L^q -norms for nonnegative Schrodinger heat semigroups, 9th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, 2012年07月02日, Orland (Florida, USA)

〔図書〕(計 1 件)

T. Kumagai, Random Walks on Disordered Media and their Scaling Limits. Lect. Notes in Math., Vol. 2101, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XL--2010. Springer, New York, (2014). 147 pages.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/kumpre.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：90234509

(2) 研究分担者

石毛 和弘 (ISHIGE KAZUHIRO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90272020

(3) 連携研究者

なし