様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2012～2014
課題番号：２４６５４０４１

研究課題名（和文）量子二重対数関数の幾何学

研究課題名（英文）Geometry of Quantum Dilogarithm Function

研究代表者
樋上　和弘（Hikami, Kazuhiro）

九州大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：６０２６２１５１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：量子二重対数関数はもともと量子離散KdV方程式の研究においてファデーエフによって導入された。カシャエフはこの量子二重対数関数を用いて結び目不変量を構成し、結び目の双曲体積との関係を予想した。一方、2000年以降盛んに研究されているクラスター代数において、量子二重対数関数は重要である。
本研究において、クラスター代数を用いて量子二重対数関数と3次元双曲幾何との関係を議論した。特に、変異を生成する演算子を量子二重対数関数を用いて構成し、カシャエフのR行列との関係を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：The quantum dilogarithm function was originally introduced by Faddeev to study a discrete analogue of the KdV equation. Sometime ago Kashaev constructed knot invariant by use the quantum dilogarithm function, and he observed that its asymptotic is dominated by the hyperbolic volume of knot complement. Recently it has been realized that the quantum dilogarithm function plays a crucial role in the quantum cluster algebra.
We have used a technique of the quantum cluster algebra to reveal a relationship between the quantum dilogarithm function and the three-dimensional hyperbolic geometry. We constructed the quantum R-operator based on cluster mutation, and derived the Kashaev R-matrix by use of the quantum dilogarithm function.

研究分野：数理物理

キーワード：数理物理　双曲幾何　二重対数関数

１． 研究開始当初の背景

(1) 二重対数関数 Li2(z)はオイラーによって初めて考察された。様々な興味深い性質を示すが、中でも 5 項間関係式が重要である。また一方で、幾何的な側面もあわせもつ。3 次元双曲空間における四面体のうち全ての頂点が無限遠にあるような理想双曲四面体の体積は、二重対数関数を用いて記述されることが知られている。

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

二重対数関数の q 変形として、下記で定義される量子二重対数関数が知られている。もともとファデーエフによって、量子離散 KdV 方程式など量子可積分系の研究において導入されたものである。正準交換関係を満たす演算子を用いることで、やはり 5 項間関係式を満たすことが知られている。

$$\Phi_\hbar(z) = \exp\Bigl(\int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{-ixz}}{4\sinh(\hbar x)\sinh(\pi x)}\frac{dx}{x}\Bigr)$$

カシャエフは、変形パラメータ q が 1 の N 冪根であるときの量子二重対数関数に注目し、結び目の不変量を構成した。さらに、不変量の N→∞での振る舞いを調べ、結び目補空間の双曲体積との関係を予想した。後に、カシャエフ不変量は色つきジョーンズ多項式の 1 の N 冪根での特殊値であることが村上斉（研究分担者）・村上順によって明らかにされ、体積予想として注目を集めている。

(2) 研究代表者は以前に、ファデーエフの量子二重対数関数と 3 次元多様体の量子不変量の関連についての研究を行った。その中で、量子二重対数関数の無限次元表示を用いて 3 次元双曲多様体の分配関数を構成した。5 項間関係式を双曲四面体の分割と捕らえるのが基本的な考えであった。ここで構成された分配関数は、古典極限において A 多項式が得られるなど、さまざまな幾何的な情報を含んでいる。

(3) 2000 年頃に、フォーミンとゼレヴィンスキはクラスター代数を導入した。クラスター変数と呼ばれる生成元と、変異という操作を兼ね備えた可換環である。その後さまざまな分野においてクラスター代数の手法が適用されるなど、活発な研究が行われている。その一つとして、クラスター代数の量子化を用いることにより、5 項間関係式などの量子二重対数関数の様々な恒等式が導かれることが指摘された。

２．研究の目的

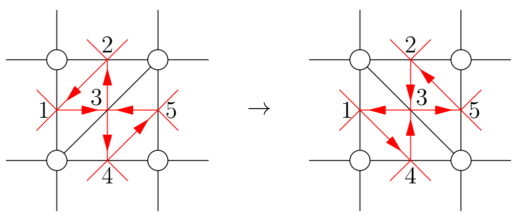
3 次元双曲四面体の体積は二重対数関数を用いて表されることから、ファデーエフの量子二重対数関数の幾何的な性質を研究することは重要である。特に、カシャエフ不変量は量子二重対数関数に基づき構成されたため、理想双曲四面体との厳密な関連づけは、体積予想の研究において不可欠である。また一方で、量子クラスター代数における変異は量子二重対数関数を用いて記述されるなど、量子二重対数関数は量子クラスター代数において重要である。
量子クラスター代数などの新しい手法を取り入れ、量子二重代数関数の幾何的な性質を研究することを目的とする。

３．研究の方法

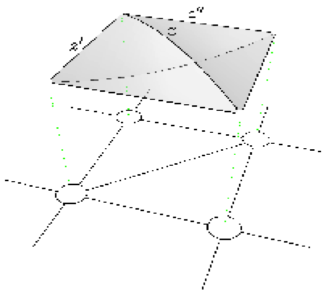
低次元トポロジー・量子不変量の専門家である村上斉（研究分担者）、近年進展が著しいクラスター代数と可積分系の関係に詳しい山崎玲（連携研究者）の協力の下、量子二重対数関数の研究を、特に体積予想との関連を視野に入れながら、幾何、代数の両面から行った。また、実際の計算には数式処理システムを適宜利用しながら、効率よく研究を行った。

４．研究成果

クラスター代数と 3 次元双曲幾何学との関連性は次のように説明される。
クラスター代数において x 変数および y 変数に対する変位という操作が基本となる。各変数は、向き付けされたグラフの頂点に割り当てられており、変位を繰り返すことによって、各変数は初期値の有理関数で表される。さて、グラフは三角形分割の双対と見なすことができるが、この場合、下図のように、変位は三角形分割の「フリップ」として考えることができる。

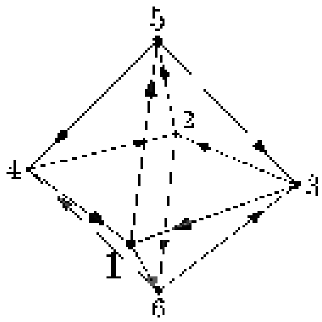


三角形分割描像では各 x 変数・y 変数は各辺に割り当てられている。クラスター代数の y 変数に対する変位の規則は、ちょうど双曲四面体を貼り付けた場合の二面角の変化に対

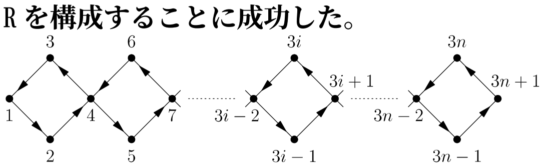


応していることが見て取れる。この変位・四面体貼り合わせの対応関係が以下の基礎となる。

(1)　　一点穴あきトーラスバンドル、および二橋結び目の複素体積のクラスター代数を用いた新しい構成方法を提出した。二橋結び目の場合、4 点穴あき球面の三角形分割に対応する向きづけられたグラフ（図参照）を用意し、その上でのクラスター変異を導入する。先に述べたように変異を双曲四面体の貼り合わせと見なすことによって、二橋結び目の補空間の四面体分割が得られる。クラスターy 変数が四面体のパラメータに相当し、またx 変数を用いることで複素体積を記述できることを明らかにした。

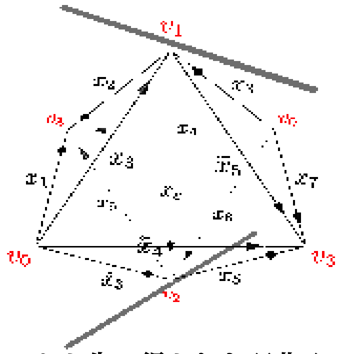


(2)　　任意の結び目を構成するには組み紐群を用いるのが一般的であり、ヤン・バクスター方程式を満たすR 行列を構成する必要がある。実際に、下記のような向き付けられたグラフに対する変位を導入することによって、ヤン・バクスター方程式を満たす変異R を構成することに成功した。



さらに、変異と双曲四面体の対応を用いることで、変異R は双曲八面体と解釈できることを明らかにした。

(3)　　カシャエフ不変量と双曲体積との関係において、ヤン・バクスター方程式を満たすカシャエフR 行列は双曲八面体として解釈すればよい、と信じられている。クラスター変位R から先に得られた双曲八面体は、ちょうどこの双曲八面体に対応しており、構成した変位R とカシャエフのR 行列とは何らかの関係があるものと期待できる。



まず、クラスター代数の量子化の手法を用いて、変位R の量子化を行った。y 変数を非可換作用素とみなすことにより、量子二重対数関数を用いてR 演算子が構成される。5 項間関係式を用いることによって、R 演算子がヤン・バクスター方程式を満たすことを証明した。
カシャエフのR 行列と比較するため、R 演算子の有限次元表現を考察した。量子二重対数関数の変形パラメータq が1 の冪根である場合を詳細に解析し、カシャエフのR 行列がほぼ再現されることを確認した。

以上のように、クラスター代数を用いて組み紐群を記述し、その量子化を考察することによって、量子二重対数関数と理想双曲四面体との関連を確立することができた。

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　6　件）

1.　K. Hikami and R. Inoue, “Braids, complex volume, and cluster algebra”, Algebraic and Geometric Topology, to appear 〔査読有〕

2.　K. Hikami and R. Inoue, “Braiding operator via quantum cluster algebra”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 47, 474006 (2014), doi:10.1088/1751-8113/47/47/474006 〔査読有〕

3.　H. Murakami, “The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister

torsion of a twist-iterated torus knot", Acta Math Vietnam 39 (2014) 649–710, doi:10.1007/s40306-014-0084-x〔査読有〕

4. K. Hikami and R. Inoue, "Cluster algebra and complex volume of once-punctured torus bundle and 2-bridge links", Journal of Knot Theory and Its Ramifications 23 (2014) 145006, 33 pages, doi:10.1142/S0218216514500060〔査読有〕

5. K. Hikami and R. Inoue, "Cluster algebra and complex volume", RIMS Kokyuroku 1866 (2013) 120–134〔査読無〕

6. H. Murakami, "The colored Jones polynomial, and the Reidemeister torsion of the figure-eight knot", Journal of Topology 6 (2013) 193–216, doi:10.1112/jtopol/jts036〔査読有〕

〔学会発表〕(計　１０　件)

1. K. Hikami, "(mock) modular form and quantum invariant", Mock Modular Forms and Physics: Black Holes, Moonshine, and Conformal Field Theory、2014年4月15日、 チェンナイ（インド）

2. H. Murakami, "The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a cable knot", Low-dimensional Topology and Number Theory, 2014年8月20日、オーベルウルファッハ（ドイツ）

3. K. Hikami, "Hyperbolic geometry and dilogarithm", Quantum Dilogarithm, Modular Double, and Representation Theory, 2013年11月20–22日、大阪市立大学（大阪）

4. H. Murakami, "The colored Jones polynomial of a knot and SL(2;C) representation of the fundamental group of knot complement, Knots and Physics Workshop in Amsterdam, 2013年9月27日、アムステルダム（オランダ）

5. K. Hikami, "Cluster algebra and complex volume", Topology Seminar at KIAS, 2013年7月23日、ソウル（韓国）

6. K. Hikami, "Cluster algebra and complex volume", Intelligence of Low-Dimensional Topology、2013年5月24日、数理解析研究所（京都）

7. H. Murakami, "How much does the colored Jones polynomial of a knot know about representation of the fundamental group to SL(2;C)", Quantum Topology and Hyperbolic Geometry, 2013年5月17日、Nha Trang,（ベトナム）

8. K. Hikami, "Cluster algebra and complex volume of 2-bridge knots", Facets of Integrability: Random Patterns, Stochastic Processes, Hydrodynamics, Gauge Theories n Condensed Matter Systems, 2013年1月25日、ストーニーブルック（アメリカ）

9. K. Hikami, "On the Complex volume of knots", Bethe Ansatz, Quantum Groups and Beyond, 2013年3月9日、数理解析研究所（京都）

10. H. Murakami, "The colored Jones polynomial, the Chern-Simons invariant, and the Reidemeister torsion of a knot", New Perspectives in Topological Field Theories, 2012年8月31日、ハンブルグ（ドイツ）

６．研究組織

(1)研究代表者
樋上　和弘　（HIKAMI, Kazuhiro）
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号：60262151

(2)研究分担者
村上　斉　　（MURAKAMI, Hitoshi）
東北大学・情報科学研究科・教授
研究者番号： 70192771

(3)連携研究者
山崎（井上）　玲（INOUE, Rei）
千葉大学・理学研究科・准教授
研究者番号：30431901