

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 11 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2012～2014

課題番号：24654057

研究課題名(和文)量子エンタングルメントを用いた量子重力理論の定式化

研究課題名(英文)A New Formulation of Quantum Gravity via Quantum Entanglement

研究代表者

高柳 匡 (Takayanagi, Tadashi)

京都大学・基礎物理学研究所・教授

研究者番号：10432353

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の研究の成果は大きく分けて二つあり、一つはAdS/CFT対応をエンタングルメント繰り込み(MERA)の立場で理解を深めたことであり、もう一つは、励起状態のエンタングルメント・エントロピーの基本的な性質を明らかにしたことである。前者の研究において、MERAの連続極限(cMERA)を考察することで、AdS/CFT対応における時空の計量がMERAの情報計量を関係づけることを発見した。また有限温度の場合にどのようにcMERAが実現できるのか初めて明らかにした。後者の研究では、励起状態のエンタングルメント・エントロピーが、励起が小さい時は、熱力学第一法則と同じ形をした法則に従うことを初めて見出した。

研究成果の概要(英文)：There are two main achievements of the present project. One of them is to deepen the conjectured interpretation of AdS/CFT correspondence as the multi-scale entanglement renormalization (MERA). We especially analyzed a continuum limit of MERA (called cMERA) and found that the spacetime metric in the gravity dual of AdS/CFT is related to the information metric in cMERA. Also we formulated cMERA at a finite temperature using the thermofield double construction. Another achievement is that we discovered a basic property which entanglement entropy of an excited state satisfies. We showed that when the excitation is small or equally when the size of subsystem for which we defined the entanglement entropy, is small, the entanglement entropy of the excited state satisfies a law which is very similar to the first law of thermodynamics.

研究分野：超弦理論

キーワード：AdS/CFT対応 量子エンタングルメント 超弦理論 場の理論

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 研究代表者らが2006年に発見したAdS/CFT対応を用いたエンタングルメント・エントロピーの計算法が世界的に注目されるようになり、量子多体系の基底状態における量子エンタングルメントの新しい性質が次々に明らかになってきた。

(2) また、この発展によって重力理論の時空自体を量子エンタングルメントのビットの集合体と解釈できるのではないかと予想が複数の研究者によってなされた。この一つの有力な考え方は、エンタングルメント繰り込む(MERA)と呼ばれる実空間の繰り込みが実はAdS/CFT対応のメカニズムになっているであろうという予想である。

## 2. 研究の目的

(1) 量子多体系、特に場の理論における基底状態の量子エンタングルメントの振る舞いに関しては多くの知識が既にえられているが、励起状態に対しては乏しいのが現状である。そこで、場の理論の中でも一番扱いやすく、AdS/CFT対応を適用できる、共形場理論(CFT)というクラスの量子系を考え、その励起状態のエンタングルメント・エントロピーに対して普遍的に成立する性質を解明する。

(2) AdS/CFT対応のメカニズムに関して、量子エンタングルメントの立場で理解を深めたい。特にエンタングルメント繰り込み(MERA)の考え方が有力視されているが、具体的な計算を伴わない直感的な議論しか現在のところ行われていない。そこで、その対応を連続極限をとることで具体的な計算を通して解析したい。

## 3. 研究の方法

(1) AdS/CFT対応を用いたエンタングルメント・エントロピーの計算法は、強結合の共形場理論の解析法として大変強力である。具体的には、対応する重力理論の計量が分かると、その空間における極小曲面の面積を計算することで共形場理論のエンタングルメント・エントロピーを求めることができる。例えば、共形場理論の基底状態は反ドジッター空間(AdS空間)に対応し、有限温度の共形場理論の場合は、反ドジッター空間ブラックホール解に対応する。より一般に、共形場理論の励起状態は、反ドジッター空間の内部を少し変形したものに相当する。

(2) 特に2次元の共形場理論では、場の理論の立場で直接計算することが可能な場合も多く、特にレプリカ法による計算法は強力である。部分系Aに対するエンタングルメン

ト・エントロピー $S(A)$ を計算する場合、レプリカ法ではまず全体の系を $n$ コピー用意し、部分系Aの境界に沿ってそれらを張り合わせた空間を考える。そして、その空間上の共形場理論の分配関数を計算し、最後に $n$ で微分し $n=1$ の極限をとる。この一見複雑な空間は2次元の場合は共形変換で作ることができるので解析な計算が可能となる。

(3) エンタングルメント繰り込みはMERAと呼ばれ、量子臨界点における量子多体系の基底状態を数値計算で求める際に利用される。AdS/CFT対応では連続的な場の理論を考えるため、連続極限を取る方が対応を見やすい。そこで連続極限を取ったMERA(cMERAと呼ばれる)の解析を利用することになる。

## 4. 研究成果

(1) 共形場理論の励起状態のエンタングルメント・エントロピーに対して成り立つ普遍的な法則を見出すために、励起状態に対するAdS/CFT対応を解析した。その結果、部分系Aが励起のスケールよりも小さい場合には、エンタングルメント・エントロピー $S(A)$ は、熱力学の第一法則に類似した法則に従うことを発見した。エントロピーの励起による変化は領域A内のエネルギーの変化に比例し、その比例係数(温度の逆数のアナロジー)は部分系の幾何学的量のみ依存する普遍的な値をとることが分かった。

(2) 前述の共形場理論の励起状態に対する第一法則は、励起が領域に広がっている時に有効であるが、励起が領域Aよりも小さなスケールで局在している場合には適用ができない。そこで、励起がある点の近くに空間的に局在している場合にエンタングルメント・エントロピーがどのように変化するかAdS/CFTを用いて調べた。局所的な励起状態に対応する重力理論の記述として、反ドジッター空間における重い粒子の運動を考えた。その粒子のバックリアクションを一般相対論を用いて計算し時空の計量を求め、その曲がった時空における極小曲面の面積を求めたことでエンタングルメント・エントロピーを計算できた。その結果、局所的に励起を行うと、それが周りに伝播することでエンタングルメント・エントロピーは徐々に増加し最大値に達し、領域Aのサイズよりも大きな時間が経過した頃に減少してゆく。特に領域Aが無限に大きい場合は常に増加し、2次元共形場理論の場合には厳密な計算を行うと時刻 $t$ ではエントロピーの増加量は $(c/6) \cdot \log[t]$ のように振る舞う。ここで $c$ は系の中心電荷である。

(3) エンタングルメント繰り込み(MERA)としてAdS/CFT対応を解釈できるかどうか解析するために連続極限(cMERA)をとる手法を用いて研究を行った。その結果、AdS空間の余次元方向(動径方向)をcMERAの粗視化の方向と解釈するとAdS/CFT対応と解釈できそうであることが分かった。この考え方をさらに進めることで、AdS空間の動径方向の計量をcMERAの情報計量と関係づけられることが分かった。具体的にはトイモデルとして自由スカラー場のcMERAを考えたので、AdS/CFT対応との定量的な比較は難しいが、定性的な振る舞いはうまく再現できた。

さらに、基底状態だけではなく、量子クエンチ(系を瞬時に励起する過程の一つ)を行って得られる励起状態に対してのcMERAを構成し、その情報計量を計算した。その結果、重力波の伝播に相当する振る舞いを確認した。

また、有限温度の場合を考えるとAdSブラックホールに対応すると考えられるので興味深い。そこでcMERAでどのように有限温度状態を記述できるのか研究を行った。cMERAの手法は混合状態に対しては定義されていなかったため、定義を大きく拡張する必要があったが、我々がその前に行った量子クエンチの場合の計算を参考にして、その自由度を2倍にすることで、具体的に構成することができた。またその構成が、ブラックホール時空において地平面の内部に貫入する座標の取り方に対応していることを見出した。

(4) 通常、場の量子論のエンタングルメント・エントロピーは、空間領域全体をAとBの二つに分けることで、ヒルベルト空間を直積として2つに分けることから始まる。その片方Bの自由度をトレースアウトすることで、Aに制限された密度行列が定義され、そのフォンノイマン・エントロピーとしてエンタングルメント・エントロピー $S(A)$ が定義される。このように定義された場合に、AdS/CFT対応と用いると、反ドジッター空間(AdS空間)内の極小曲面の面積として計算できることはよく知られている。

しかしながら、場の理論のヒルベルト空間の分け方は、もっと一般化できるのは明白である。ではAdS/CFT対応における計算も一般化できるであろうか?そこで、研究代表者らは、超弦理論における本来のAdS/CFT対応では、AdS空間とコンパクトな空間の直積が現れることに着目し、このコンパクトな空間内の極小曲面の面積が場の理論の何らかのエンタングルメント・エントロピーと解釈できるかどうか考えた。Dブレーンなどを用いて具体的なモデルを考察した結果、場の理論の実空間を二つに分けるのではなく、ゲージ理論の場の成分を二つに分けることに対応することを見出した。実際に、少なくとも半定

量的な議論のレベルでは、AdS/CFT対応の計算と場の理論の計算が一致することを確かめることができた。またこの場の理論のエンタングルメント・エントロピー計算を実行するために、複数の新しい計算手法を開発した。

(5) AdS/CFT対応では通常、共形場理論は境界のない空間上で定義されることが多い。しかし、時空が複雑なトポロジーを持っている場合にどのようにAdS/CFTが機能するのか理解することは、AdS/CFT対応を量子エンタングルメント観点から理解する上でも重要である。共形場理論の存在する空間に境界がある場合にAdS/CFTを拡張する方法(AdS/BCFT)は研究代表者の2011年の研究で明らかになっている。

しかしながらその手法は、境界が直線の場合のみに検証されており、曲がっている場合にどのように境界を持つ時空を決定できるのか分からなかった。本研究では、この問題を解決するには、従来のGraham-Fefferman座標を用いる手法では問題が生じる理由(その座標では見かけの特異点が生じる)を明らかにし、別のうまい座標系をとることで曲がった境界の効果を取りいれることを見出した。

またこのように得られたより深い理解をもとに3次元共形場理論に2次元の境界が存在する場合にAdS/BCFT対応の解析を行い、分配関数を評価することで、境界のサイズの対数に比例するアノマリー項が存在することを明らかにした。この項の比例係数は、2次元共形場理論の中心電荷に類似した量であり、境界中心電荷という名前を付与した。この量は、ザモロドチコフのC定理のように(境界の)繰り込み群の流れに沿って単調減少することが期待される。実際に自由場理論のいくつかの具体例で、予想通り単調減少することを確認した。また、摂動論でもその性質が示せることを明らかにした。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計17件)

- ① J.Bhattacharya, M.Nozaki, T.Takayanagi and T.Ugajin, "Thermodynamical Property of Entanglement Entropy for Excited States" *Physical Review Letters*, 110 2013, 091602.  
DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.091602

② M.Nozaki, T.Numasawa, T.Takayanagi,  
"Holographic Local Quenches and  
Entanglement Density," Journal of High  
Energy Physics, 1305, 2013, 080.  
DOI: 10.1007/JHEP05(2013)080

③ M.Nozaki, S.Ryu, T.Takayanagi,  
"Holographic Geometry of Entanglement  
Renormalization in Quantum Field  
Theories," Journal of High Energy  
Physics, 1210, 2012, 193.  
DOI: 10.1007/JHEP10(2012)193

④ A.Mollabashi, N.Shiba, T.Takayanagi,  
"Entanglement between Two Interacting  
CFTs and Generalized Holographic  
Entanglement Entropy," Journal of High  
Energy Physics, 1404, , 2014, 185  
DOI: 10.1007/JHEP04(2014)185

⑤ M.Nozaki, T.Takayanagi, T.Ugajin,  
"Central Charges for BCFTs and  
Holography," Journal of High Energy  
Physics, 1206, 2012, 066.  
DOI: 10.1007/JHEP06(2012)066

[学会発表] (計 36 件)

① T.Takayanagi, "Holographic  
Entanglement Entropy of Excited States,"  
Strings 2013, Sogang University, Seoul,  
Korea, Jun. 23-29, 2013.

② T. Takayanagi, "Entanglement Entropy  
and Gravity/Condensed Matter  
Correspondence," Plenary Lecture at The  
20th International Conference on General  
Relativity and Gravitation (GR20),  
Uniwersytet Warszawski, Warsaw, Poland,  
July 7-13, 2013.

③ T.Takayanagi, "Developments of  
Holographic Entanglement Entropy," KITP  
conference: Blackholes and Information,  
KITP, UCSB, USA, May. 21-25, 2012..

④ T.Takayanagi, "Holographic  
Entanglement Entropy of Excited States,"  
Gauge/Gravity Duality 2013, Max Planck  
Institute for Physics, Munich, Germany,  
July 29-Aug. 2, 2013.

⑤ T. Takayanagi, "Entanglement Entropy  
and Spacetime," Lectures at Spring School  
on Superstring Theory and Related Topics,  
Trieste, Italy, March 31th-April 2nd, 2014.

[図書] (計 1 件)

[産業財産権]  
○出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

[その他]  
ホームページ等  
[http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~tadas  
hi.takayanagi/](http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~tadas<br/>hi.takayanagi/)

6. 研究組織  
(1) 研究代表者  
高柳 匡 (TAKAYANAGI, Tadashi)

研究者番号 :

(4) 研究協力者  
笠 真生 (RYU, Shinsei)