様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号： １４３０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４７１０１６５

研究課題名（和文） 相関構造をもつ待ち行列モデルと集合的リスクモデルの漸近解析

研究課題名（英文） Asymptotic analysis of queueing models and collective risk models with correlation structure

研究代表者

増山　博之（MASUYAMA, HIROYUKI）

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：６０３７８８３３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題では，相関構造をもつ待ち行列モデルや集合的リスクモデルの希少事象確率の評価に向けた数学的道具の構築を目的とする．この目的を達成するために，GI/G/1型マルコフ連鎖や再生型累積過程のランダム時抽出に対する裾漸近解析を行った．また，得られた結果を用いて，ON-OFFマルコフ型集団到着過程と固定長サービスを入力とする有限容量単一サーバ待ち行列の呼損率の漸近公式を導出した．さらに，ブロック単調なマルコフ連鎖の最終ブロック列増大切断に対する計算可能な誤差上界を示した．

研究成果の概要（英文）：The goal of this research project is to establish mathematical tools for the estimation of the rare event probabilities in queueing models and collective risk models with correlation structure. To achieve the goal, we studied the tail asymptotics of GI/G/1-type Markov chains and regenerative cumulative processes sampled at random times. We also utilized the obtained results to derive asymptotic formulas for the loss probability of a single-server queue with a finite capacity fed by an ON-OFF batch Markovian arrival process and deterministic service times. In addition, we presented a computable error bound for the last-block-column-augmented truncation of block-monotone Markov chains.

研究分野： 待ち行列

キーワード： 待ち行列モデル　集合的リスクモデル　希少事象確率　漸近解析　構造化マルコフ連鎖　GI/G/1型マルコフ連鎖　再生型累積過程　 確率変数のランダム和

１．研究開始当初の背景

100 年以上の歴史をもつ待ち行列研究の中心にあるのは，セミ・マルコフ型待ち行列である．セミ・マルコフ型待ち行列では，客の到着や退去といった事象の発生時刻で系内客数過程を観測するとマルコフ連鎖が得られる．この事実と，再生理論や率保存則を組み合わせ，系内客数分布や待ち時間分布などの特性量を求めるというのが，セミ・マルコフ型待ち行列に対する基本的な解析手法である．

1970 年代中頃から，到着過程やサービス過程といった入力過程が(マルコフ的な)相関構造をもつセミ・マルコフ型待ち行列の研究が主流になってきた．相関構造をもつセミ・マルコフ型待ち行列から作られるマルコフ連鎖は，系内客数を表す主変数と，主変数の遷移に影響を及ぼす背後状態からなる 2 変数マルコフ連鎖となり，その遷移確率行列はブロック構造を有する．

しかしながら，一般に，ブロック構造化マルコフ連鎖の定常分布を陽的に，あるいは数値的に求めるのは容易ではない．そのため，厳密解の導出にこだわらず，裾漸近解析(分布の裾減衰特性に関する解析)や，重負荷極限解析，近似解析などを通して，有用な理論的結果を得ようとする研究が近年注目を集めている．特に裾漸近解析は，待ち行列システムのリスク尺度，すなわち，系内客数や待ち時間が非常に大きな値を取るという希少事象の発生確率(希少事象確率)に対する理論的な評価を与えるため，1990 年代後半頃から盛んに研究が行われている．

ところで，ブロック構造化マルコフ連鎖の裾漸近公式を，待ち行列モデルに応用するには，一つ分の到着時間間隔における退去数分布，あるいは，一つ分の退去時間間隔における到着数分布の裾漸近特性を把握する必要がある．この問題を抽象化したのが，「再生型累積過程のランダム時抽出」に対する裾漸近解析である．ここで，再生型累積過程は，セミ・マルコフ型待ち行列における到着過程や退去過程に対応し，一方，ランダム時抽出は，一つ分の到着時間間隔ないしは退去時間間隔が経過した後に観測するという行為に対応する．

さて，「再生型累積過程のランダム時抽出」に対する裾漸近解析の先行研究については，その特別な場合である「独立同一に分布する確率変数のランダム和」すなわち，集合的リスクモデルを対象としたものがほとんどである．ちなみに，集合的リスクモデルは損害保険数理の古典的な解析モデルであり，「再生型累積過程のランダム時抽出」とは，古典的な集合的リスクモデルに相関構造を入れた一般的な解析モデルだと言える．残念ながら，この一般的な解析モデルに対する研究はまだ十分に行われていない．したがって，ブロック構造化マルコフ連鎖の裾漸近公式をより多くの待ち行列モデルに応用するためには，「再生型累積過程のランダム時抽出」に対する裾漸近解析の深化と発展が必要不可欠である．また，逆に言えば，この一般的な問題に対する研究が進めば，集合的リスクモデルに対する新しい数学的道具の提供にもつながる．

２．研究の目的

本研究は，相関構造をもつマルコフ型待ち行列モデルと集合的リスクモデルにおける希少事象確率の理論的評価に向けた数学的道具の構築を主たる目的としてる．

前項 1.で述べたように，相関構造をもつセミ・マルコフ型待ち行列の裾漸近解析は，ブロック構造化マルコフ連鎖の裾漸近解析に帰着される．しかし，後者の解析結果を前者に還元するには，相関構造をもつ集合的リスクモデルである「再生型累積過程のランダム時抽出」に対する裾漸近解析が必要となる．このように待ち行列モデルと集合的リスクモデルの裾漸近解析は密接な関係があり，これらを本研究の二本柱とする．

以下，具体的な研究項目とその目的を挙げる．

(1) GI/G/1型マルコフ連鎖の定常分布に対する裾漸近解析

代表的なブロック構造化マルコフ連鎖である GI/G/1 型マルコフ連鎖を考える．GI/G/1 型マルコフ連鎖は，マルコフ型到着過程を入力とするセミ・マルコフ型待ち行列の解析において重要な役割を果たす．GI/G/1型マルコフ連鎖やその特別な場合であるM/G/1型マルコフ連鎖の定常分布の数値計算は容易ではなく，その裾漸近解析に関する研究が過去20年ほどの間，盛んに行われている．

こうした裾漸近解析に関する先行研究は「軽裾的漸近解析」と「劣指数的漸近解析」に分類される．どちらの場合も，漸近公式の導出には非常に緻密な数学的議論が要求されるせいか，漸近公式の成立条件に不備がある報告や，強い技術的な条件が課せられている報告が散見される．こうした現状では，待ち行列モデルの性能評価を行う際，誤った結論が誘発されたり，そもそも，評価したい待ち行列モデルに公式が適用できなかったりする恐れがある．

本研究では，代表的なブロック構造化マルコフ連鎖である GI/G/1 型マルコフ連鎖に対し，厳密かつ無駄のない軽裾的および劣指数的漸近解析を行い，幅広い待ち行列モデルに対する正確な性能評価の実現を目指す．

(2) 再生型累積過程のランダム時抽出に対する裾漸近解析

独立抽出，すなわち，抽出時刻Tが再生型累積過程$B(t)$と独立な場合には，抽出時刻Tが2次長裾的(T の平方根が長裾的)であるという必要条件と，いくつかの技術的な条件のもとで，$B(T)$と T の裾減衰を直接結びつける単純な漸近公式(★)が成り立つことが知られている．

【漸近公式(★)】
$\lim_{x\to\infty}\mathrm{P}(B(T) > bx)/\mathrm{P}(T > x)=1$, $b = \lim_{t\to\infty}B(t)/t$

しかしながら，漸近公式(★)の成立条件として先行研究で示されているものには，明らかに冗長な条件が含まれている．例えば，抽出時刻 T の劣指数性や，T の裾の長さに関係なく $B(t)$に課せられた技術的な条件である．

また，非独立抽出，すなわち，抽出時刻Tが再生型累積過程 $B(t)$と独立ではない場合においても，上記漸近公式(★)が成り立つことを示した先行研究がある．しかしながら，それは古典的な集合的リスクモデルを対象としたものである．

以上のように，漸近公式(★)の成立条件には大きく改善できる余地が残されている．そこで本研究では，先行研究で課せられている「強すぎる条件」をできる限り弱め，待ち行列モデルへの応用可能性を広げる．

３．研究の方法

(1) GI/G/1型マルコフ連鎖に対する劣指数的漸近解析

定常分布の裾確率に関する劣指数的漸近公式と，定常分布の確率関数に関する局所劣指数的漸近公式の導出を試みる．研究代表者は既に，GI/G/1型マルコフ連鎖の特別な場合である M/G/1 型マルコフ連鎖を対象とし，既知の劣指数的漸近公式の成立条件を，主変数の周期に依存した形で弱めることに成功している．しかし，本研究の準備段階において，主変数の周期によらず，より緩い成立条件を確立するための着想を得るに至った．

本研究ではその着想をもとに，一般的な GI/G/1 型マルコフ連鎖に対する劣指数的漸近公式をできる限り緩い条件下で導出する．さらに，局所劣指数的な分布の畳み込みに関する評価不等式を示した上で，劣指数的漸近公式の導出法と同様にして，局所劣指数的漸近公式を示す．局所劣指数的漸近公式は，通常の劣指数的漸近公式より強い成立条件を要求するが，前者が与える定常分布の情報は後者のものより多い．なお，研究代表者が知る限り，GI/G/1型マルコフ連鎖に関する局所劣指数的漸近公式の報告はない．

(2) GI/G/1型マルコフ連鎖の軽裾的漸近解析

GI/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布が軽裾的になるとき，裾漸近解析において重要な役割を果たすのが，非境界状態におけるジャンプ・サイズ分布$\{\boldsymbol{A}(k)\}$の行列確率母関数$\boldsymbol{A}^*(z)$である．もう少し具体的に言えば，特性方程式 $\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^*(z)) = 0$，$z > 1$ の絶対値最小の解 θ が極めて重要なパラメータとなる(ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列)．ほとんどの先行研究では，解 θ の逆数 $1/\theta$ が定常分布の減衰率となる場合のみを対象としている．以下では簡単のため，$1/\theta$ が定常分布の減衰率となる場合を「典型的な場合」，それ以外の場合を「非典型的な場合」と呼ぶことにする．

典型的な場合を対象とした先行研究では，非境界状態におけるジャンプ・サイズ分布$\{\boldsymbol{A}(k)\}$の周期と定常分布の裾減衰との関係が十分明らかにされていない．本研究では，研究代表者らが示した「拡張版最終値定理」を用いて，ジャンプ・サイズ分布$\{\boldsymbol{A}(k)\}$の周期を自然な形で取り込んだ定常分布の裾漸近解析公式を導出する．これは，GI/G/1型マルコフ連鎖の特別な場合である M/G/1型マルコフ連鎖に対して研究代表者らが示した結果の一般化となる．

一方，非典型的な場合については，境界状態からのジャンプ・サイズ分布$\{\boldsymbol{B}(k)\}$が定常分布の減衰率を定める場合や，パラメータ θ が存在しない場合について考える．これらの場合については，拡張版最終値定理と上記研究項目(1)で用いた数学的道具とを組み合わせれば，裾漸近公式が得られる見通しがある．

(3) 再生型累積過程のランダム時抽出に対する漸近解析

本研究の準備段階において，独立抽出および非独立抽出のどちらの場合に対しても，抽出時刻 T の劣指数性を仮定することなく，T の長裾次数 n に応じた形で漸近公式(★)の成立条件を示した．これにより，T が有限次長裾的な場合に限れば，先に述べた本研究項目の目的は達成している．

そこで本研究では，抽出時刻 T の分布が無限次長裾的($n=\infty$)な場合を考える．そのため，T の分布が一貫変動的であると仮定する．一貫変動的な分布族は無限次長裾的な分布族のサブクラスであり，希少事象確率の漸近解析でよく用いられる正則変動的な分布族を特別な場合として含む．

さて，上で述べたように，一貫変動的な分布に従う抽出時刻 T は無限次長裾的である．したがって，抽出時刻 T の裾確率が，再生型累積過程のランダム時抽出 $B(T)$の裾確率に対して支配的な影響をもつための条件は，T が有限次長裾的な場合と比べて大きく緩和

されるとの予想が立つ．この予想が正しいことを確認するためには，確率変数列の和に関する大偏差確率の評価不等式を新たにいくつか用意する必要があるが，それらを一つ一つ解決し，目標を達成したい．

(4) 相関構造をもつ有限容量単一サーバ待ち行列モデルの呼損率の漸近解析

呼損率は有限容量待ち行列に関する最も重要な性能評価指標の一つである．本研究では，到着過程の相関の強さが呼損率に与える影響を調べるため，(離散時間) ON-OFF マルコフ型集団到着過程と固定長サービスを入力とする有限容量単一サーバ待ち行列を考える．

ON-OFF マルコフ型集団到着過程は，それぞれ独立同一に分布する ON 期間と OFF 期間を有し，各 ON 期間では同一の初期分布で始まる一つのマルコフ型集団到着過程に従って到着が発生する．ON-OFF マルコフ型集団到着過程は，従来よく研究がなされてきたマルコフ型集団到着過程を一般化した到着過程である．

さて，上記の待ち行列では，系内客数過程を ON 期間および OFF 期間の終了時刻で観測すると，GI/G/1 型マルコフ連鎖が得られる．この事実と，「宮沢の率保存則」を利用し，任意時点での定常系内客数分布を，観測時点での定常系内客数分布を用いて表現する．これに研究項目 (1)-(3)の結果を適用して，システム容量を無限に大きくした時の呼損率の漸近公式を導く．最後に，得られた漸近公式を用いて，到着過程の相関が呼損率の漸近特性に及ぼす影響について考察を行う．

４．研究成果

(1) GI/G/1型マルコフ連鎖に対する劣指数的漸近解析

当初の計画通り，先行研究より緩い条件下で劣指数的漸近公式を示し，さらに局所劣指数的漸近公式も新たに導出した．また，先行研究はいずれも，非境界状態での背後過程の遷移を支配する行列(フェーズ遷移行列と呼ぶ)が確率的である場合のみを扱っているが，本研究はフェーズ遷移行列が劣確率的である場合も考え，劣指数的および局所劣指数的漸近公式を示した．この結果，フェーズ遷移行列が劣確率的であるときの定常分布の裾減衰は，フェーズ遷移行列が確率的である場合と比べて速くなることがわかった．

(2) GI/G/1型マルコフ連鎖に対する軽裾的漸近解析

まず，「典型的な場合」については，目標を達成し，ジャンプ・サイズ分布$\{A(k)\}$の周期と定常分布の裾減衰との関係を明示的に表す漸近公式を得た．

一方，「非典型的な場合」についても一定の成果は得られているが，まだ完全な成果を公表できる段階に至っていない．通常，定常分布の漸近公式は，減衰速度を表す「減衰率」と値の大きさに関わる「前因子(prefactor)」で構成される．しかし，本報告書作成段階では，漸近公式の前因子が非ゼロであることの証明が一部未完となっている．

(3) 再生型累積過程のランダム時抽出に対する漸近解析

独立抽出および非独立抽出のどちらの場合に対しても，抽出時刻 Tの分布が一貫変動的な分布に従うという基本条件のもとで，漸近公式(★)が成立するための条件を複数個示した．これらの条件は研究着手時の予想通り，抽出時刻 Tが有限次長裾的な場合と比べて大幅に緩和されている．また得られた条件を，先行研究が対象とする特別なモデルにあわせて読み替えたとしても，そこで与えられた条件より緩いものになっている．

(4) 相関構造をもつ有限容量単一サーバ待ち行列モデルの呼損率の漸近解析

研究項目(2)が完結しなかったため，研究項目(1)と(3)の結果(準備段階で示されていた結果も含む)を用いて，ON-OFF マルコフ型集団到着過程と固定長サービスを入力とする有限容量単一サーバ待ち行列の呼損率の漸近公式を導いた．その結果，一つ分の ON 期間における到着総数の平衡分布が劣指数的であるとき，その平衡分布の裾減衰が呼損率の減衰速度を支配するという事実と，ON 期間自身の平衡分布の裾減衰が呼損率の減衰速度を決定するための条件が明らかになった．

(5) ブロック構造化マルコフ連鎖の切断誤差評価

本研究課題の申請時には計画していなかったが，関連する研究項目として，「ブロック構造化マルコフ連鎖の切断誤差評価」に関する研究を行った．

大規模な構造化マルコフ連鎖の定常分布の数値計算は容易ではなく，この問題に対する最も現実的な解決法は，遷移確率行列の切断である．

本研究では，数ある切断近似法のうち，遷移確率行列の北西角を切り出し，その最終ブロック列を増大させる「最終ブロック列増大切断」に着目した．これは最終ブロック列増大切断によって得られる定常分布が，一

定の条件下で，元の定常分布に対する最も良い近似を与えることが示されているからである．しかしながら，その近似誤差に対する計算可能な上界は，「単調性」という仮定のもとで与えられており，ブロック構造化マルコフ連鎖に適用するには強すぎる制約を伴う．

そこで，「単調性」を「ブロック単調性」に緩和しつつ，先行研究にあるように幾何的ドリフト条件を仮定して，計算可能な誤差上界を与えた．これにより，例えば，マルコフ型集団到着過程と一般サービス時間分布をもつ単一サーバ待ち行列の定常系内客数分布に関する精度保証付き数値計算が可能となった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）
[P1] Hiroyuki Masuyama, ``Error Bounds for Augmented Truncations of Discrete-Time Block-Monotone Markov Chains under Geometric Drift Conditions," Advances in Applied Probability, vol. 47, no. 1, pp. 83-105, 2015.
doi:10.1239/aap/1427814582

[P2] Hiroyuki Masuyama, ``Tail Asymptotics for Cumulative Processes Sampled at Heavy-Tailed Random Times with Applications to Queueing Models in Markovian Environments," Journal of the Operations Research Society of Japan, vol. 56, no. 4, pp. 257-308, 2013.
http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e_mag/Vol.56_04_257.pdf

[P3] Tatsuaki Kimura, Hiroyuki Masuyama and Yutaka Takahashi, ``Subexponential Asymptotics of the Stationary Distributions of GI/G/1-Type Markov Chains," Stochastic Models, vol. 29, no. 2, pp. 190-239, 2013.
doi:10.1080/15326349.2013.783286

〔学会発表〕（計 11 件）
[T1] 増山 博之，``再生型累積過程と構造化マルコフ連鎖の漸近解析 －待ち行列への応用－,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会 関西支部記念講演会，大阪大学中之島センター，2015/03/14.

[T2] 境谷 秀作，増山 博之，高橋 豊，``例外的な境界挙動を有する反射型ランダムウォークの切断近似,'' 2014 年度確率モデルシンポジウム(Symposium on Stochastic Models 2015)，東北大学 片平キャンパス，2015/01/22-24.

[T3] 増山 博之，``Big Queues －裾の重い分布と希少事象確率－,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会 チュートリアル講演，東工大(大岡山)，2014/06/21.

[T4] 増山博之，``Error Bounds for Augmented Truncations of Block-Monotone Markov Chains,'' 2013 年度確率モデルシンポジウム(Symposium on Stochastic Models 2014)，pp. 137-145，東京理科大 森戸記念館，2014/01/22-24.

[T5] 増山 博之，``ブロック構造化マルコフ連鎖の切断誤差評価,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会(第 244 回)，東工大(大岡山)，2013/12/21.

[T6] 木村 達明，増山 博之，高橋 豊，``GI/G/1 型マルコフ連鎖における定常分布の重負荷極限,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年秋季研究発表会，アブストラクト集，pp. 22-23，徳島大学，2013/09/11-12.

[T7] 宮脇 大，増山 博之，高橋 豊，``多重クラス集団到着 M/G/1 待ち行列の重負荷極限,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年秋季研究発表会，アブストラクト集，pp. 32-33，徳島大学，2013/09/11-12.

[T8] 宮脇 大，増山 博之，高橋 豊，``多重クラス集団到着 M/G/1 待ち行列の重負荷極限,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「OR 横断若手の会」，関西大学，2013/04/13.

[T9] 原 健三，増山 博之，笠原 正治，高橋 豊，``再生型 on-off 到着過程を用いたインターネット・トラヒック同定,''
電子情報通信学会技術研究報告(NS2012-166)，pp. 7-12，沖縄残波岬ロイヤルホテル，2013/03/07-08.

[T10] 増山 博之，``GI/G/1 型マルコフ連鎖の劣指数漸近特性の十分条件とその応用,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年春季研究発表会，アブストラクト集，pp. 242-243，東京大学，2013/03/05-06.

[T11] 増山 博之，``重裾ランダム時刻で抽出された累積過程の裾漸近解析とその応用,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会(第 233 回)，東工大(大岡山)，2012/05/19.

〔その他〕
ホームページ等
http://infosys.sys.i.kyoto-u.ac.jp/~masuyama/

６．研究組織
(1)研究代表者
増山 博之（MASUYAMA HIROYUKI）
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：60378833