

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740008

研究課題名(和文) 単項式イデアルの自由分解と算術階数との関係の解明

研究課題名(英文) Relations between free resolutions and the arithmetical rank for a monomial ideal

研究代表者

木村 杏子 (Kimura, Kyouko)

静岡大学・理学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：60572633

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の目的は、多項式環のスクエアフリーな単項式イデアルの算術階数、およびそれを与えるup to radicalな生成元の構成と自由分解との関係の解明であった。高さ3のGorensteinイデアルの算術階数の決定(寺井直樹氏との共同研究)、stringやcycleという超グラフに付随するイデアルの算術階数の決定(Paolo Mantero氏との共同研究)が主な成果である。

また、エッジイデアルの極小自由分解に関する研究も、本研究課題の目的の一つであった。エッジイデアルのベッチ数の非消滅性に関する新たな十分条件を得るなど、種々の成果が得られた。

研究成果の概要(英文)：We study a squarefree monomial ideal of a polynomial ring over a field. The main theme of the project is to clarify relations between the arithmetical rank of the ideal, especially a construction of elements which generate the ideal up to radical, and a free resolution of its quotient ring. We proved that the arithmetical rank is equal to the projective dimension for a Gorenstein squarefree monomial ideal of height 3 (joint work with Naoki Terai) and a squarefree monomial ideal whose associated hypergraph is a string or a cycle (joint work with Paolo Mantero).

Another theme of the project is the study of a minimal free resolution of an edge ideal. We obtain some results, for example, a new sufficient condition for the non-vanishing of the Betti numbers of an edge ideal.

研究分野：組合せ論的可換環論

キーワード：算術階数 射影次元 極小自由分解 ベッチ数 エッジイデアル regularity

1. 研究開始当初の背景

ネーター局所環の有限生成加群に対し、極小自由分解の存在が知られている。極小自由分解は同型を除いて一意に定まり、その長さは射影次元、各成分のランクはベッチ数と呼ばれる。極小自由分解を具体的に構成することは、可換環論における基本的かつ重要な問題である。単項式イデアルに対しては、Taylor resolution、Lyubeznik resolution、hull resolution 等様々な具体的な自由分解が知られている。このような具体的な自由分解の多くは cellular resolution と呼ばれるものの範疇にあり、Bayer、Peeva、Sturmfels、Velasco、Welker などによって盛んに研究されてきた。具体的な自由分解は扱いやすく、重要であるが、極小な自由分解の構成が望まれる。

さて、多項式環のイデアルに対し、算術階数という量が定義される。それは、イデアルを up to radical に生成する元の個数の最小値である。これは、代数的集合を超曲面の共通部分として表す時に必要な超曲面の個数の最小値であり、代数幾何における古典的な研究対象である。一般に算術階数を決定すること、さらにその最小個数の up to radical な生成元を見つけることは困難である。Up to radical な生成元を構成すれば、算術階数の上からの評価は得られるが、それが実際に算術階数と一致しているかどうかの有効な判定法がないためである。しかし、スクエアフリーな単項式イデアルの算術階数については Lyubeznik により、射影次元を下限としてもつことがわかっている。算術階数と射影次元の一致するイデアルは、既にいくつか見つけられ、多くの場合で一致することが期待される。反例は今のところ体の標数による例しか知られていない。この研究は、Barile や寺井等により活発になされてきた。しかし、研究手法は主に射影次元と同じ個数の up to radical な生成元を見つける、というものであった。これは、個々のイデアルに個別にアタックするというものであり、汎用性のある構成方法の確立が望まれた。

2. 研究の目的

研究代表者はこれまでの研究において、Lyubeznik resolution とよばれる自由分解から、up to radical な生成元の構成に成功した。極小自由分解の長さが射影次元であることを踏まえれば、このような自由分解を基にする構成方法は汎用性のある構成方法となりうる。そこで、他の自由分解から up to radical な生成元を構成することはできないか、という問いが自然に生ずる。

本研究の目的の一つは、上記の問いに対する答えを見つけ、up to radical な生成元により一般的な構成法を確立することであった。またこの研究を行うことで、算術階数と自由分解との関係性を解明することも目標としていた。算術階数は今のところ、可

換環論においてどの程度重要な不変量であるのか、評価が確立されているとは言い難いが、何らかの関係性が発見されれば、その位置づけがはっきりすると期待していた。さらにそれにより、算術階数の研究もより活発になることも期待した。

一方、研究を遂行する上で、具体的な自由分解を扱うことは欠かせないため、本研究が極小自由分解の構成の研究への足掛かりになることも期待した。

3. 研究の方法

ある程度考える対象を絞って研究に取り掛かることが、効率よく研究を遂行するために必要である。そこで、次の方法をとることを試みた：

- (1) 既知の結果を本研究課題の視点から捉えなおす。
- (2) 良い性質をもつイデアルについて、up to radical な生成元の構成を試みる。
- (3) エッジイデアルの極小自由分解を調べる。
- (4) cellular resolution から up to radical な生成元の構成を試みる。

以下、詳しく説明していく。

(1) 主な研究対象は deviation が 2 の Alexander 双対イデアルである。このようなイデアルのうち、線型自由分解をもつものについては、射影次元と算術階数が一致することは既知であった。これは、寺井直樹氏、吉田健一氏との共同研究によるものである。しかし、まだ結果を論文として公表しておらず、同共同研究を継続し、系統的な構成方法を抽出することで結果をまとめることを試みた。

(2) 主に高さ 3 の Gorenstein イデアルを研究対象とした。研究代表者はこれまでの研究において、高さ 2 の Cohen-Macaulay イデアルの算術階数について、射影次元と同じ個数の up to radical な生成元の構成に成功した。特に、算術階数と射影次元が一致することを証明した。一方、高さ 3 の Cohen-Macaulay イデアルにすると、反例がある。そこで Cohen-Macaulay よりも性質の良い、Gorenstein イデアルに的を絞るのは自然なことである。本研究は寺井直樹氏と議論を重ねて遂行した。

(3) エッジイデアルとは、グラフから定義されるイデアルであり、組合せ論的な研究対象である。このイデアルを取り扱う理由は、グラフをある性質で制限することで、エッジイデアルの方もよい性質をもつものとして制限できるなど、系統的な例を与えるのに都合がよいためである。また、その極小自由分解を考察することは、一般のイデアルに対して自由分解を考察することへの足掛かりとなる。さらに、扱うイデアルが具体的なものであるため、その構造も考察しやすいという利点があり、本研究課題の目的達成のための有効な方法であると考えられる。本研究は主に、日比孝之氏、東谷章弘氏と議論しながら

遂行した。

(4) Batzies & Welker の関連する論文を読み、勉強しながら、最初の研究対象となりうるものを探ることから始めた。

4. 研究成果

(1) 考察の結果、Stanley-Reisner イdealについて、単体的複体の2つの面上の錐をとったときの算術階数及び射影次元の変化を調べることが効率的であるように思われた。なお、1つの面上の錐をとったときは、Barile & Terai が行っており、その応用として、2-linear resolution をもつイdealの算術階数が決定される。上記の方針は、その類似でもある。研究の結果、算術階数や射影次元について、ある程度の評価は得られたものの、実用化できるまでには至っておらず、さらなる考察が必要である。なお、上記のイdealの算術階数の結果自体については、寺井直樹氏、吉田健一氏と共著論文を執筆し、掲載決定となった。

(2) 寺井直樹氏との共同研究により、高さ3のGorensteinイdealの算術階数が射影次元に一致することを、具体的な up to radical な生成元を構成することで証明した。実際には、その生成元は複雑なものであり、具体的な記述は大変で、生成元の構成方法を見つけた、といった方が正確かもしれない。本結果は、論文として発表した。

また、研究代表者は以前に寺井直樹氏、吉田健一氏との共同研究で超グラフを用いたスクエアフリーな単項式イdealの分類を導入したが、Paolo Mantero 氏との共同研究により、超グラフが string や cycle の場合に、それに付随するイdealの算術階数が射影次元に一致することを証明した。本結果に関しても論文を執筆・投稿し、アクセプトされた。さらに沼田泰英氏との共同研究により、この string に対する結果は、もう少し一般に tree でも正しいことがわかった。

(3) エッジイdealのベッチ数の非消滅性に関して新たな十分条件を見つけた。研究代表者は以前に、ある種の性質をもつブーケと呼ばれる部分グラフの集合が、そのグラフのエッジイdealのベッチ数の非消滅と関係することを示した。ブーケとは、 $(1, n)$ 型の完全2部グラフのことである。本結果は、上記の結果を、 $(1, n)$ 型に限らず、任意の型の完全2部部分グラフの集合でも同様のことが成立することを示したものである。さらに、Cohen-Macaulay 二部グラフについて、Herzog & Hibi や Mohammadi & Moradi の結果を用いることで、ある特別な非消滅なベッチ数については今回得られた十分条件が必要条件にもなっていることが分かった。これは、このグラフの regularity の特徴づけを含むものである (Kummini, Francisco & Hà & Van Tuyl)。さらに研究を進めたところ、Kummini の結果を用いることで unmixed な二部グラフの射影次元の特徴付けにも成功した。本結果も論文

として取りまとめ、投稿し、アクセプトされた。さらに最近、寺井直樹氏、Siamak Yassemi 氏との共同研究で、本結果を very well-covered グラフに一般化できるのではないかと、研究を進めている。この研究は、さらに算術階数の研究につなげていく予定である。

また、エッジイdealの regularity に関する研究も行った。グラフのマッチング数、誘導マッチング数がそれぞれエッジイdealの regularity の上限、下限となっている (Hà & Van Tuyl, Katzman) が、それら的一致するグラフのエッジイdealの環論的性質を調べた。本研究は日比孝之氏、東谷章弘氏、Augustine B. O'Keefe 氏との共同研究である。本研究の結果も、論文として発表した。上記のグラフを、そのグラフを特徴付けた研究者にちなんで、Cameron-Walker グラフと名付けたが、これを含むようなグラフのクラスについて、同様に様々の環論的性質を調べる研究を行った。本研究は、日比孝之氏、東谷章弘氏、土谷昭善氏との共同研究である。本研究の成果は、グラフに関する組合せ論的な研究成果と合わせ、論文を執筆し、投稿した。

(4) まず、Kummini & Walther の論文を読み、彼らが、Novik による Lyubeznik resolution を一般化した自由分解について、そこから up to radical な生成元を構成していたことが分かった。一方、Batzies & Welker による Lyubeznik resolution の別の一般化もある。その自由分解から up to radical な生成元の構成を試みるのは、本研究課題の遂行にとって重要な研究である。本研究の手始めとして、扱いやすい自由分解を見つけたものの、成果を出すには至っておらず、さらなる考察が必要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6件)

Kyouko Kimura, Non-vanishing of Betti numbers of edge ideals and complete bipartite subgraphs, Communications in Algebra (掲載決定)、査読有。

Kyouko Kimura, Paolo Mantero, Arithmetical rank of strings and cycles, Journal of Commutative Algebra (掲載決定)、査読有

Kyouko Kimura, Naoki Terai, Ken-ichi Yoshida, Arithmetical rank of a squarefree monomial ideal whose Alexander dual is of deviation two, Acta Mathematica Vietnamica (掲載決定)、査読有

Takayuki Hibi, Akihiro Higashitani, Kyouko Kimura, Augustine B. O'Keefe,

Algebraic study on Cameron—Walker graphs, Journal of Algebra, 査読有、Vol. 422, 2015, 257—269
DOI:10.1016/j.jalgebra.2014.07.037
Kyouko Kimura、Naoki Terai、Arithmetical rank of Gorenstein squarefree monomial ideals of height three, Journal of Algebra, 査読有、Vol. 422, 2015, 11—32
DOI:10.1016/j.jalgebra.2014.09.005
Kyouko Kimura、Naoki Terai、Ken-ichi Yoshida、Licci squarefree monomial ideals generated in degree two or with deviation two, Journal of Algebra, 査読有、Vol. 390, 2013, 264—289
DOI:10.1016/j.jalgebra.2013.06.001

〔学会発表〕(計 17 件)

木村 杏子、Dominating induced matching をもつグラフの unmixed 性、グレブナー若手集会、2015 年 2 月 1 日、信州大学(長野県・松本市)
木村杏子、特殊な一次元超グラフに付随するイデアルの算術階数、第 1 回グレブナーセミナー、2014 年 11 月 27 日、関西学院大学(大阪府・大阪市)
Kyouko Kimura、Arithmetical rank of trees and cycles、Commutative Algebra and Singularity Theory 2014、2014 年 8 月 1 日、立山国際ホテル(富山県・富山市) ポスターセッション
Kyouko Kimura、Characterizations of ring invariants of edge ideals in terms of associated graphs、Japan Conference on Graph Theory and Combinatorics、2014 年 5 月 21 日、日本大学(東京都・世田谷区)
木村杏子、string hypergraph と cycle hypergraph の算術階数、グレブナー若手集会、2014 年 2 月 16 日、九州大学(福岡県・福岡市)
木村杏子、Cameron—Walker グラフについて、第 26 回可換環論セミナー、2014 年 1 月 30 日、北海道教育大学(北海道・札幌市)
木村杏子、寺井直樹、Arithmetical rank of Gorenstein squarefree monomial ideals of height three、第 35 回可換環論シンポジウム、2013 年 12 月 5 日、京都大学(京都府・京都市)
木村杏子、寺井直樹、高さ 3 の Gorenstein squarefree monomial ideal の算術階数、日本数学会 2013 年度秋季総合分科会、2013 年 9 月 25 日、愛媛大学(愛媛県・松山市)
木村杏子、エッジイデアルのベッチ数の非消滅性と完全二部グラフ、日本数学会 2013 年度年会、2013 年 3 月 22 日、京都大学(京都府・京都市)

木村杏子、3-disjoint な完全二部部分グラフとエッジイデアルのベッチ数、第 18 回代数学若手研究会、2013 年 3 月 17 日、大阪大学(大阪府・豊中市)
木村杏子、二部グラフのエッジイデアルのベッチ数の特徴付けに向けて、グレブナー若手集会、2013 年 2 月 21 日、立教大学(東京都・豊島区)
木村杏子、Lyubeznik resolution とエッジイデアルのベッチ数の非消滅性、第 25 回可換環論セミナー、2013 年 1 月 31 日、奈良県新公会堂(奈良県・奈良市)
木村杏子、2 つの面上の錐をとったときの算術階数の変化、グレブナー若手集会、2012 年 7 月 15 日、慶應義塾大学(神奈川県・横浜市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 杏子(KIMURA, Kyouko)
静岡大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号: 60572633