様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１７１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４７４００１３

研究課題名（和文）離散モース理論の組合せ論的可換代数への応用

研究課題名（英文）Application of discrete Morse theory with commutative algebra

研究代表者
岡崎　亮太（Okazaki, Ryota）

福岡教育大学・教育学部・講師

研究者番号：２０６２４１０９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：ボレル固定イデアル I の「Eliahou-Kervaire 自由分解」，「先行研究で得られた自由分解」の２つの分解について，I がコーエン=マコーレーならば，両者には閉球のセル分割が付随することを柳川浩二氏との共同研究で示した．両自由分解は離散モース理論を利用して構成することができ，本成果は，同理論で失われた幾何的情報を復元したと解釈できる．
また，多項式環上の多重次数付き加群 M について，「M の自由分解の構成」，「M の根基の定義，及び，既存の結果の拡張（V. Ene 氏と共同）」，「アフィン有向マトロイドイデアルのコーエン=マコーレー性の特徴付け（柳川浩二氏との共同）」等を行った．

研究成果の概要（英文）：By a study with K. Yanagawa, we've proved that for a Cohen-Macaulay Borel-fixed ideal, its two different graded minimal free resolutions — Eliahou-Kervaire resolution and the one given by our previous work — are supported by cellular decompositions (distinct in general) of a closed ball. These resolutions are constructed by applying discrete Morse theory (DMT); the result above can be considered as a reconstruction of geometrical information lost (obscured) by application of DMT. Besides, the following have been achieved: Construction of a free resolution of a multigraded module: Defining its radical of them by using a functor to generalize known results for monomial ideals (with V. Ene): Characterization of Cohen-Macaulay-ness of the bounded complex and the matroid ideal of an affine oriented matroid (with K. Yanagawa).

研究分野：組合せ論的可換代数

キーワード：Cellular 自由分解　離散モース理論　正則 CW 複体　アフィン有向マトロイド　bounded complex　多重次数付き加群　根基

１．研究開始当初の背景

次数付き加群の極小次数付き自由分解（以下，極小自由分解）は（組合せ論的）可換代数において重要な研究道具，研究対象である。事実，Ext 加群や Tor 加群等の重要な（コ）ホモロジーは極小自由分解を利用して計算され，また，極小自由分解から，ベッチ数や，射影次元，Castelnuovo-Mumford 正則数等の主要な不変量が定まる。本研究の代表者（以下，研究代表者）は先行研究にて linearity defect と呼ばれる極小自由分解から定まる不変量について調べたが，その研究を更に進めるには，極小自由分解の構造を理解する必要があった。しかし，一般に極小自由分解を「素手で」計算することは困難であり，一部のクラスでしか具体的な構成は与えられていなかった。

一方，2000 年に入ってから，代数的位相幾何学における理論である離散モース理論を利用して極小自由分解を求める手法が E. Bazies 氏，V. Welker 氏，E. Sköldberg 氏らによって提示された。この手法は２種類あり，一方は離散モース理論の幾何的側面を利用したもの，他方は代数的側面を利用して得られたものである。研究代表者は，両者の理論を利用した研究を行った際に，その有用性を認識したが，同時に，まだ改善の余地があるとも感じた。

２．研究の目的

（１）以下，Bazies 氏らの理論の内，離散モース理論の幾何的側面を利用したものを「幾何的手法」，代数的側面を利用したものを「代数的手法」と略記する。

上述の両手法は，与えられた鎖複体について，ホモロジーに寄与しない不要な部分を削除することで，元の鎖複体と同じホモロジーを持つ，より小さな鎖複体を構成しようというものである。これを極小ではない自由分解に適用することで，「極小化」することが出来る。幾何的手法は，cellular 鎖複体（自由分解）と呼ばれる CW 複体が付随する鎖複体（自由分解）に関してのみ適用できるが，代数的手法はより広いクラスの鎖複体（自由分解）を対象とすることが出来る。一方で，幾何的手法により得られた鎖複体には，CW 複体の構造が入るが，代数的手法では，その様な構造が入るかどうかは分からない。

そこで，本研究では両者の長所を上手く兼ね備えた理論を構築することを目指した。

（２）Batzies 氏らは自身の理論により，極小次数付き自由分解を求める手法は開発されたものの，極小自由分解が構成されているのは，未だ，ごく限られた単項式イデアルのみである。そこで，本研究では，任意の単項式イデアルの極小自由分解の具体的な記述を得ることを究極の目標とし，新しいクラスの単項式イデアルについて，極小自由分解を構成することを目指した。.

（３）（１） で述べた代数的手法は，鎖複体の（コ）ホモロジーの計算にも応用ができる。この代数的手法を重要なコホモロジーの計算に応用しようというのが 3 つ目の目的である。加群の重要な不変量である深度やクルル次元の計算や，コーエン=マコーレー性の判定に非常に有効なコホモロジーに局所コホモロジーがあるが，この局所コホモロジーはチェック複体と呼ばれる鎖複体のコホモロジーとして計算できる。そこで，代数的手法をチェック複体に応用し，効率的な計算手法を模索することを目指した。

３．研究の方法

関連図書や論文の通読，関連研究集会への参加等を通し，最新の情報の収集，意見交換等を行い，その情報を参考にしながら，研究を進めた。加えて，コンピュータを適宜利用して，扱いやすい具体例の計算を行い，予想・検証を何度も行いながら，考察を重ねた。

研究の目的（１）の研究では，与えられたボレル固定イデアルから，その 2 つの極小自由分解（研究成果（１）参照）に付随して定まる半順序集合（幾何的情報を復元する際に必要となる組合せ論的情報）の様子をグラフで表示するプログラムを，数式処理システム「Macaulay 2」上で構成し，研究に活用した。

（２），（３）の研究においても，「Macaulay 2」を利用し，適宜，極小自由分解や局所コホモロジーの計算を行い，研究を進めていく上での参考とした。

４．研究成果

（１）『ボレル固定イデアルの 2 つの極小自由分解に付随する幾何構造の決定』

研究の目的（１）で述べた幾何学手法と代数的手法について精密に比較した結果，幾何的手法は，幾何的な情報を忘れると，代数的手法の一部として捉えられることが確認できた。次なる課題として，「代数的手法により得られた鎖複体は，いつ幾何的構造を持つか（cellular 鎖複体か）？」「持つとすれば，その構造はどの様なものか（cellular 鎖複体に付随する CW 複体の幾何的構造はどのようなものか）？」という問題が生じた。この問題は幾何的手法を用いていても実は生じる問題で，幾何的手法により得られる極小次数付き自由分解は，cellular 鎖複体であるとは分かるものの，付随する CW 複体がどの様な位相空間の分割を与えているか把握するのは，離散モース理論の特質から一般には難しい。

これに対し，ボレル固定イデアルの極小自由分解について，関西大学の柳川浩二氏と共同で研究を行い，以下の結果を得ることが出来た。

ボレル固定イデアルは「Eliahou-Kervaire 自由分解」と呼ばれる良く知られたものと，

研究代表者が柳川氏との共同研究で得た 2 つの極小自由分解を持つことが分かっており，両者は幾何的手法を利用して得られる。この 2 つの極小自由分解について, 対応するボレル固定イデアルがコーエン=マコーレーであれば，両者には閉球のセル分割として得られる CW 複体が付随することを示した。

この結果は，代数的手法で「失われた」幾何的情報を復元したと解釈でき，上述の問題の一つの解決法を提示したといえる。また，この様に，極小次数付き自由分解に付随する幾何構造を決定した結果は，殆ど見られず，この点においても意義がある。本研究成果は，後述の研究成果（４）にも繋がった。

組合せ論的可換代数において，コーエン=マコーレー性は位相的性質として理解される。コーエン=マコーレー性は，元来，環や加群の代数的性質であるが，G. A. Reisner による結果を通して，位相空間にもコーエン=マコーレー性が定義され, 閉球はコーエン=マコーレー空間の典型例となっている。この点でも，今回の結果は，大変興味深く，今後の新たな展開の可能性を秘めている。

本結果は，論文として既に雑誌に掲載済みである。

（２）『多重次数付き加群の根基を定義，及び，単項式イデアルの根基に関する既存の結果の一般化と改良』

本研究は，Ovidius 大学の V. Ene 氏と組合せ論的可換代数の最新の情報交換や意見交換をする中で生まれたものである。

2005 年に，J. Herzog 氏，高山幸秀氏，寺井直樹氏により，体 k 上の多項式環 S の単項式イデアル I とその根基 I' の関係について，次の主張が成立することが示された。「S/I の局所コホモロジーの各次数のパートは，S/I' の局所コホモジーの対応する次数のパートに，k-ベクトル空間として同型である。」「S/I のコーエン=マコーレー性やブックスバウム性等の代数的性質が，S/I'にも遺伝する。」

S/I やI は共に, 多重次数付き加群の構造を持ち，S/I' や I' はスクウェアー・フリー加群と呼ばれる加群の成す圏 SqS に属する。このことから，S/I や I から S/I' や I' を得る操作は，ある種の「スクウェアー・フリー化」と解釈が出来る。この事実に着目し，研究代表者は V. Ene 氏と共同で，S 上の有限生成多重次数付き加群の特定のクラスの成す圏（実質的に，有限次数付き多重次数付き加群の成す圏）から，SqS への完全関手 r* を構成し，上述の Herzog 氏らの結果を r* の言葉で書き換えることに成功した。S/I や I に r* を作用させると, S/I' , I' が得られ，r* は，単項式イデアルの根基をとる操作を，有限生成多重次数付き加群へ一般化したものになっている。

この結果の最大の成果は，根基を取る操作を完全関手として捉えることに成功した点である。実際，この r* の完全関手性を利用することで，Herzog 氏らによる既知の結果を有限生成多重次数付き加群へ拡張しただけでなく,「S/I' の局所コホモロジーが S/I の局所コホモロジーの次数が負のパートの部分と S-加群として同型であること」や，「S/I の自由分解に r*を作用せることで，S/I' の自由分解を容易に得られる」等，Herzog 氏らによる研究では得られなかった新しい事実を発見することが出来た。

本結果は，論文として雑誌に掲載済みである。

（３）『多重次数付き加群の自由分解の構成』

（１）で述べた様に，Batzies 氏らの理論を利用し極小自由分解を構成するには，予め, 自由分解が構成されていなければならない。単項式イデアルの場合は, Taylor 分解と呼ばれる古くから知られているものがあり，一般の多重次数付き加群 M については，2007 年に A. B. Tchernev 氏により構成されたものがある。しかし，Tchernev 氏の構成法で自由分解を構成するには, M の有限自由表示が分かっている必要があった。

これに対し，研究代表者は, M 自身のみを利用して M の自由分解を構成することに成功した。残念ながら，この結果を利用してこれまで知られていなかった新しいクラスの単項式イデアルの極小自由分解の構成には至らなかったが，この構成は非常に簡明なものであるので，Tchernev 氏のものよりも，今後の応用がし易いと思われる。

本結果は，ルーマニアで開催された研究集会と，山口大学で行われたセミナーにて発表を行った。

（４）『アフィン有向マトロイドの bounded complex とマトロイド・イデアルのコーエン=マコーレー性の特徴付け』

本研究成果は，研究成果（１）から派生して生まれたものである。

アフィン有向マトロイドはアフィン超平面配置の一般化を与えるもので，大雑把にいうと，球面上の余次元 1 の（振る舞いの良い）球面による配置に相当する。アフィン超平面配置 A が与えられたとき，アフィン超平面により分けられて得られる領域の内，有界なものを集めると CW 複体となる。この複体を A の bounded complex と呼ぶ。bounded complex の概念は，アフィン有向マトロイドについても，定義することができ, やはりアフィン超平面配置の場合の一般化となっている。

2002 年に I. Novik 氏, A. Postnikov 氏, B. Sturmfels 氏により，アフィン有向マトロイド M に付随するイデアル,「マトロイド・イデアル」が定義され，マトロイド・イデアルは M の bounded complex が付随する極小自由分解を持つことが示された。

M の bounded complex は可縮であるこ

とが知られており，M が「十分一般的」ならば，閉球の分割になっていると予想される。アフィン超平面配置の場合は，T. Zaslavsky 氏により，いくつか場合に bounded complex が閉球の分割であることを主張する予想が，1975 年に提唱されている。その内の一つは，2007 年に X. Dong 氏 によりアフィン有向マトロイドに一般化された形で肯定的に解決された。しかし，Zaslavsky の予想の一部は，未解決であり，A. Björner 氏らによる「単体的なアフィン有向マトロイドの bounded complex は閉球の分割になっているか？」という問いも未解決である。

研究成果（1）で述べた通り，閉球と同相である位相空間はコーエン=マコーレーである。このことから，

① アフィン有向マトロイド M の bounded complex B は，いつコーエン=マコーレーか？

という問いか自然に生ずる。また，（1）の結果と，上述の Novik 氏らの結果から

② M のマトロイド・イデアル O がコーエン=マコーレーならば，B は閉球の分割となるか？

という問いも生ずる。この問題は，研究成果（1）で得た「幾何的情報を復元する」技巧が利用できる可能性があり，もしこれが解決できれば，上述の Zaslavsky 氏 や Björner 氏らによる予想の解決に大きく貢献すると期待される。

そこで，研究代表者は柳川浩二氏と共同でこの問題に取り組み，B のコーエン=マコーレー性，O のコーエン=マコーレー性の特徴づけをそれぞれ与え，「O がコーエン=マコーレーならば，B もそうであり，逆は一般に不成立である」ことを示した。

本結果で①については無事に解決することが出来た。②については，残念ながら，未解決である。

本結果は，現在，論文として執筆中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① R. Okazaki and K. Yanagawa, On CW complexes supporting Eliahou-Kervaire type resolutions of Borel fixed ideals, Collectanea Mathematica, Vol. 66, Issume 1, 2015, pp. 125—147, DOI: 10.1007/s13348-014-0104-0，査読有

② V. Ene and R. Okazaki, On the radical of multigraded modules, Journal of Algebra, Vol. 388, 2013, pp. 10—21, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.05.007, 査読有

〔学会発表〕（計　6　件）

① 岡崎亮太，Buchsbaum 複体入門，大阪組合せ論セミナー，大阪市立大学梅田サテライト文化交流センター，2013 年 11 月 16 日

② 岡崎亮太，多項式環上の有限生成多重次数付き加群の（必ずしも極小とは限らない）次数付き自由分解の構成，福岡・山口可換環論セミナー，山口大学吉田キャンパス，2013 年 5 月 25 日

③ 岡崎亮太，多重次数付き加群の根基について，第 25 回可換環論セミナー，奈良県新公会堂，奈良県奈良市，2013 年 1 月 30 日

④ 岡崎亮太，On a CW complex supporting a free resolution of a Borel fixed ideal，第 34 回可換環論シンポジウム，IPC 生産性国際交流センター，神奈川県三浦郡葉山町，2012 年 11 月 26 日

⑤ 岡崎亮太，On a minimal free resolution of a Borel fixed ideal and its supporting CW complex，日本数学会 2012 年度秋季総合分科会，九州大学伊都キャンパス，2012 年 9 月 21 日

⑥ R. Okazaki, Construction of minimal free resolutions of some monomial ideals by algebraic discrete Morse theory, The 20th National School on Algebra ``Discrete Invariants in Commutative Algebra and in Algebraic Geometry", Mangalia, Romania, Sep. 4th, 2012

６．研究組織

（１）研究代表者

岡崎　亮太（OKAZAKI，Ryota）
福岡教育大学・教育学部・講師
研究者番号： 20624109