

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：14602

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2014

課題番号：24740017

研究課題名(和文) 保型形式、代数多様体と岩澤理論の関係

研究課題名(英文) Automorphic forms, algebraic varieties and Iwasawa theory

## 研究代表者

岡崎 武生 (Okazaki, Takeo)

奈良女子大学・自然科学系・准教授

研究者番号：80437334

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：符号(2,2)のユニタリー群上保型表現の関数等式を与え、新形式理論を構築した。新形式を固定する離散群として、ディーパラモジュラー群を定義した。特に、符号(2,2)のユニタリー群上の保型表現がジーゲル保型形式とテータ対応している場合、ディーパラモジュラー群で固定されるシャライカビリオドを持つことを示した。ジーゲル保型形式とのテータ対応と新形式理論を使うことにより、ファン-ヒーメンとファン-ストラテンのジーゲル保型形式に関する予想も解決した。

研究成果の概要(英文)：We established functional equations for automorphic representations of  $GU(2,2)$ , and a New form theory corresponding to them. We call D-paramodular subgroups which fix the new forms. In particular, when the automorphic representation is distinguished, it has a D-paramodular Shalika period. By considering the theta correspondence between  $GSp(4)$  and  $GU(2,2)$ , we give a proof for a conjecture of van Geemen and van Straten.

研究分野：保型形式、整数論

キーワード：Newform  $GU(2,2)$  Siegel Modular Form Automorphic L-function

## 1. 研究開始当初の背景

(代数多様体と保型形式について) 1970 年代に志村五郎, M. Eichler によって, 『(楕円保型形式のゼータ関数) = (モジュラー曲線のゼータ関数)』が示されました (志村-Eichler 理論).

この結果は, 保型形式という解析的对象物とモジュラー曲線という幾何的对象物がゼータ関数という遺伝子のようなものを共有するといった驚くべきもので, 『(楕円曲線のゼータ関数) = (楕円保型形式のゼータ関数)』(志村-谷山予想)の根拠ともなりました. そして, 志村-Eichler 理論の一つの拡張として, 二次体上のヒルベルト保型形式とヒルベルト曲面のゼータ関数が一致することが, Labesse, Ribet などにより 1980 年代に示されました. 楕円保型形式は, 階数 3 の直交群  $O(3)$  上の保型形式と解釈でき, 二次体上のヒルベルト保型形式は, 階数 4 の直交群上の保型形式と解釈することができます. そこで, 志村-Eichler 理論は, 他のタイプの群でも成立することが期待され, 1980 年代に二次のシンプレクティック群  $GSp(2)$  上の保型形式 (即ち次数 2 のジークル保型形式) に対する研究が始まりました. ジークル保型形式, 階数 5 の直交群上の保型形式と解釈できます. しかし, ジークル保型形式への理論の拡張は, 上のヒルベルト保型形式への場合より相当難しく, 今でも多くの数論幾何学や保型形式論の専門家が研究しています. G. Laumon 氏により, 『階数 4 の直交群  $O(4)$  上の保型形式からのテータリフトでは得られない, 次数 2 重さ 3 レベル  $N$  のジークル保型形式のゼータ関数は, レベル  $N$  の主合同部分群で定義されるジークルモジュラー-3 次元多様体のゼータ関数に寄与する』(Composito math. 1997) という結果が得られました. しかし, 保型形式論の応用上, レベル  $N$  の保型形式を扱うだけでは不十分であります. また,  $O(4)$  上の保

型形式からのテータリフトで得られるジークル保型形式は, どのように寄与しているのか? という疑問も残ります.

私は, 山内卓也氏との共同研究において, この寄与の明示的な予想を与えました (American Jour. Math 2011).

van Geemen, Nygaard, van Straten, Hulek は, いくつかの具体的なジークルモジュラー多様体において, ハッセ-ヴェイユ-ゼータ関数を研究し, その多様体上の保型形式の  $L$ -関数に関する予想を複数個与えました.

その予想の内,  $O(4)$  上の保型形式からのテータリフトで得られるジークル保型形式に関するものは, 私が解決しました (Jour. Number Theory, 2007). しかし, そうでないジークル保型形式に関する予想は, 解決できませんでした.

(半整数重さの保型形式と岩澤理論について) 半整数重さの保型形式とは, 通常保型形式とは異なり, モジュラー多様体上の微分形式とは解釈できないものです. しかし, 半整数重さの楕円保型形式は, テータ対応の一種 (志村対応) により, 通常保型形式と対応させることができます. 更に, 半整数重さの保型形式のフーリエ係数には, ゼータ関数の特殊値が現われるので, Birch-Swinnerton 予想, 合同数問題への応用があり, 通常保型形式より重要で応用の幅が広いと考えられます.

大阪大学の伊吹山知義先生により, 次数 2 の半整数重さのジークル保型形式は, 通常保型形式と対応することが予想されています. この予想が解決されれば, 次数 2 のジークル保型形式のスピノル  $L$ -関数の  $p$ -進化が可能であることを私は発見しました.

しかし, 楕円保型形式の場合と異なり, この予想された対応はテータリフトでは, 説明できず, まだ解決されていません.

## 2. 研究の目的

(代数多様体と保型形式について) van Geemen, Nygaard, van Straten, Hulek 達が与えた, 具体的な3次元ジーゲルモジュラー多様体における保型ゼータ関数とハッセ-ヴェイユ-ゼータ関数に関する予想を完全に解決する.

(半整数重さの保型形式と岩澤理論について) 次数2の半整数重さのジーゲル保型形式における新形式理論を構築し, 厳密な Pull back 公式を与え, 次数2のジーゲル保型形式のスピノルL関数の  $p$ -進化を行う.

## 3. 研究の方法

様々なテータ対応を具体的に研究し, 明示的に対応を与えることにより, 一方の群上の保型形式論を他方の群へ変換し, 様々な理論を簡略化できないか模索する. 例えば, 階数4の直交群上の保型形式から2次のジーゲル保型形式へのテータリフトを具体的に与えることにより, 3次元ジーゲルモジュラー多様体に直交群のモジュラー多様体がどのように寄与するかを解明することが将来期待できます. 2次のジーゲル保型形式と  $GL(4)$ の保型形式のテータ対応を研究すれば, Roberts 氏と Schmidt 氏による2次のジーゲル保型形式の新形式理論(Lec. Note math. Springer, 2007) が簡略化され, 拡張も期待されます.

新形式とは, 保型表現空間を生成する最も重要な保型形式であり, そのフーリエ係数などのピリオドに, ゼータ関数などの特殊値が現われることが期待されます.

特に, 吉田予想(志村-谷山予想の  $GSp(2)$ 版)のような, ラングランズタイプの予想において, ガロア表現と対応する保型形式は新形式だと強く推測されるので, 応用上重要な保型形式です.  $GL(n)$ の新形式理論は, Piatetski-Shapiro, Jacquet, Shalike (Math. Annalen, 1981) により完成して

いるのに比し, Roberts- Schmidt は, 相当多くの議論を要したことから, 他の群における新形式理論は  $GL(n)$ より相当困難のようです.

## 4. 研究成果

$GU(2,2)$ の generic 既約保型表現の関数等式を与えた. そして, この関数等式に対応し Newform 理論を構築した. Newform を固定する離散群として, D-paramodular 群を定義した. 特に,  $GU(2,2)$ の保型表現が distinguished とよばれる場合, 即ち,  $GSp(4)$ の保型表現とテータ対応しているとき, D-paramodular 群で固定される Shalika period を持つことを示した.  $GSp(4)$ と  $GU(2,2)$ のテータ対応と新形式理論を使うことにより, van Geemen-van Straten の予想を肯定的に解決した. この予想は,  $GSp(4)$ のある具体的な保型形式のスピノル L 関数が, 楕円保型形式と CM-楕円保型形式の convolution 積となっていたものであり, Endoscopic リフトタイプや, 斉藤-黒川リフトタイプと呼ばれる, 既知の保型形式の構成法では洗え割れないものなので, 非常に難しかった.

同様に, ヒルベルト保型形式の浅井ゼータ関数に対応した新形式理論も完成に近づいており, 近い将来, テータリフトと Pull back formula を合わせることで, 浅井ゼータ関数の  $p$  進補完も可能になると思われる.

山内卓也氏との共同研究で, ある Siegel モジュラー3次元多様体のハッセ-ヴェイユ-ゼータ関数を決定し, その多様体上の具体的な2-form (保型形式)を与え, L関数の比較を行った. そして, Soudry リフトタイプの保型形式のモジュラー多様体への寄与に関する予想を与えた.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者に

は下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 1 件)

RIMS 研究集会「モジュラー形式と保型表現」

Okazaki, Takeo Newform for  $GU(2,2)$

2015 年 2 月 5 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岡崎 武生 (OKAZAKI, Takeo)

奈良女子大学・自然科学系・准教授

研究者番号: 80437334

### (2) 研究協力者

山内 卓也 (YAMAUCHI, Takuya)

鹿児島大学・教育学部・准教授

研究者番号: 90432707

### (3) 連携研究者