

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 8 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740039

研究課題名(和文) 擬アノソフ写像類のエントロピーと三次元双曲ファイバー多様体の多面的研究

研究課題名(英文) A study of Entropies of pseudo-Anosov mapping classes and hyperbolic fibered 3-manifolds

研究代表者

金 英子 (Kin, Eiko)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：80378554

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：曲面の写像類から写像トーラスとよばれる3次元ファイバー多様体が定まる。写像類が擬アノソフであることと、写像トーラスが双曲的であることは同値である。1次元ベッチ数が1より大きな3次元ファイバー双曲多様体Mを固定するとき、写像トーラスとしてのMの表し方は無限個ある。すなわち(位相型が同じと限らない)曲面の写像類の無限列があり、そこから得られる写像トーラスの無限列がMと同相になる。本研究ではマジック多様体Nについて、写像トーラスがNと同相になるような擬アノソフ写像類の全てを具体的に構成した。この結果を用いて、3次元ファイバー双曲多様体の基本群の両側不変順序の性質を調べた。

研究成果の概要(英文)：We consider the mapping class group of an orientable surface. Given a mapping class, we can build its mapping torus which is a fibered 3-manifold. It is known by Thurston that a mapping class is pseudo-Anosov (pA) if and only if its mapping torus is hyperbolic. If we fix a fibered 3-manifold M with the first Betti number greater than 1, there are infinitely many ways to represent M as mapping tori. I consider the so-called magic 3-manifold N which is a hyperbolic 3-manifold with 3 cusps. I explicitly construct every pA mapping class whose mapping torus is homeomorphic N. By using these pA mapping classes, I study some properties on bi-orderings of the fundamental groups of some hyperbolic fibered 3-manifolds.

研究分野：位相幾何学

キーワード：位相幾何 双曲多様体 ファイバー多様体 写像類群 擬アノソフ エントロピー 群の不変順序

1. 研究開始当初の背景

向き付け可能曲面 S の写像類群の元のうち、特に擬アノソフ写像類を考える。擬アノソフ写像類の代表元として擬アノソフ写像とよばれる写像がとれる。この写像から定まる S 上の安定/不安定葉層による拡大率の対数をとったものを擬アノソフ写像類のエントロピーという。曲面 S を固定すると、 S 上の擬アノソフ写像類のエントロピー全体には最小値が存在する。この最小値を以下では曲面 S の最小エントロピーという。曲面が単純な場合を除き、ほとんどの S において S の最小エントロピーは決定されていない。一方で、曲面のある適当な族 (e.g. 種数 g の閉曲面の族や、 n 個の穴あき球面の族など) に関して (種数 g や穴の個数 n に関する) 最小エントロピーの漸近挙動についてはいくつかの結果が研究開始当初、既に知られていた。例えば、Penner の結果から種数 g の閉曲面の族の最小エントロピーの漸近挙動は $1/g$ であり、広中えり子氏と私による結果から、 n 個穴あき球面の族の最小エントロピーの漸近挙動は $1/n$ であることがわかっていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は以下である。

- (1) いくつかの曲面 S について、 S の最小エントロピーを決定したい。そのために、最小エントロピーの上からと下からのシャープな評価を与えること。
- (2) 与えられた曲面 S の最小エントロピーを実現する擬アノソフ写像類を構成すること。その写像トラスはどのような 3 次元ファイバー多様体か、調べること。
- (3) エントロピーが最小、あるいは非常に小さい擬アノソフ写像類の“形”を調べること。
- (4) 曲面 S の写像類群の部分群 G (あるいは集合でもよい) を考える。部分群 (部分集合) G の擬アノソフ写像類のエントロピー全体の最小値を G の最小エントロピーという。適当な曲面の族から定まる部分群の族 G_n について、 G_n の最小エントロピーの n に関する漸近的挙動を調べること。

3. 研究の方法

(1) いくつかの曲面 S については、 S の最小エントロピーの値そのものは知られていたが、最小エントロピーを実現する擬アノソフ写像類の構成については知られていなかった。また、ある曲面の族についても、最小エントロピーであることが大いに期待される値そのものは知られていたが、それを実現する擬アノソフ写像類の族の構成までは与えられていなかった。これらの写像類は、マジック多様体とよばれるカスプ付き 3 次元ファイバー双曲多様体の、あるファイブレーションのモノドロミーになることが以前の本研究成果であった。マジック多様体の各ファイバークラスの Thurston ノルムやエントロピーを与える多項式といった基本的な道具を既に私

は持っており、これらが下記 4 の研究成果 (1)(3) において重要な役割を果たした。

(2) エントロピーが漸近的に $1/n$ である n -組ひもの族は、広中えり子氏と私によって 2006 年に最初に与えられた。2011 年に高沢氏と私は、広中氏との共同研究で構成した n -組ひもの族は、マジック多様体における、穴あき球面をファイバーとするモノドロミーとして実現できることを示した。 n -組ひも全体において、知られている例のうちエントロピーが最も小さい擬アノソフ n -組ひもは、これまでのところ広中-金が構成したものである。その一方で、高沢氏との共同研究で得たある技術を用いると、漸近的にエントロピーが $1/n$ である擬アノソフ n -組ひもの族が他にも豊富に存在することを、経験上、私は知っていた。広中氏や高沢氏との共同研究で得た知見や技術を用いることで上記の研究目的 (4) の研究を進め、下記の研究成果 (2) を得た。

4. 研究成果

(1) [研究目的 (2)(3) に対応] マジック多様体の各ファイブレーションのファイバーとその擬アノソフモノドロミーを具体的に構成した。さらに擬アノソフモノドロミーに付随する、トレイントラック写像を構成した。これによって、上記の研究目的 (1) で述べた、問題となっていた擬アノソフ写像類の族を具体的に構成した。またエントロピーが非常に小さい擬アノソフ写像類を大量に提供できるようになった。これまでに知られている例の中で、最小エントロピーを実現する擬アノソフ写像類の“形”を、McMullen が提唱した、トレイントラック写像の推移グラフに付随するカーブグラフを用いて記述した。

(2) [研究目的 (4) に対応。廣瀬進氏との共同研究] 種数 g の閉曲面の写像類群の部分群の一つであるハンドル体群を考える。ハンドル体群の元のうち、超楕円的対合と可換であるもののなす部分群 (超楕円的ハンドル体群) の最小エントロピーの種数 g に関する漸近挙動は $1/g$ であることを示した。さらに超楕円的ハンドル体群に属すエントロピーが小さい擬アノソフ写像類の無限列を構成した。この研究の手法を用いて、下記の部分群、部分集合についても考察し、同様の結果を得た。

(i) 3 次元球面のヘーガード曲面を保つ部分群のうち、超楕円的対合と可換であるもののなす部分群。

(ii) スピン構造を保つ部分群。

(iii) 3 次元多様体の 2 重分岐被覆として現れる円周上の曲面束のモノドロミーとなる写像類の集合。

これら (i)(ii)(iii) の部分群 (部分集合) の元は、球面組ひもで記述できる。特に (iii) を表す球面組ひもは、ある対称性を持つ組

ひも全体と一致する。

(3) [Dale Rolfsen 氏と共同研究] 穴あき曲面 S の写像類は、穴あき曲面 S の基本群、すなわち自由群の外部自己同型写像を誘導する。自由群は両側不変順序群である (i.e., 自由群は、両側不変なある順序を許容することが知られてる。本研究では

(問題 1) どのような写像類が、自由群の両側不変順序を保つ(以下、たんに自由群の順序を保つ、という)か?

(問題 2) 擬アノソフ写像類の中で、自由群の順序を保たないものが存在するか?

について考察した。なお問題 1 は、

(問題 1') 与えられた写像類の写像トラスの基本群が両側不変順序群になるのはどのような写像類か?

という問題と言い換えられることに注意する。本研究では、曲面 S が n 個の穴あき球面のとき、 S の写像類が周期的の場合に問題 1 について完全な解答を与えた。さらに周期的な写像類が自由群の順序を保つ場合には、保たれる不変順序の具体的を豊富に与えた。問題 2 については、自由群の順序を決して保たない擬アノソフ写像類の無限列を具体的に与えた。この無限列は、研究成果(1)で述べた結果を用いて構成した。系として、あるプレツェル絡み目補空間の無限族の基本群は、両側不変順序群でないことがわかった。群が両側不変順序群でないことを示す判定条件は、Rolfsen-Clay によるものが知られているが、Rolfsen-Clay の判定条件は本研究の考察対象である穴あき曲面には使えないことに注意しておく。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 5 件)

金 英子, 高沢 光彦, The boundary of a fibered face of the magic 3-manifold and the asymptotic behavior of the minimal pseudo-Anosovs dilatations, 査読有, Hiroshima Mathematical Journal に掲載予定.

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~kin/publication/index.html>

金 英子, Dynamics of the monodromies of the fibrations on the magic 3-manifold, New York Journal of Mathematics 21 (2015) 547-599.

<http://nyjm.albany.edu/j/2015/21-25v.pdf>

金 英子, 小島 定吉, 高沢 光彦, Minimal dilatations of pseudo-Anosovs generated by the magic 3-manifold and their asymptotic behavior, Algebraic and Geometric Topology 13 (2013), 3537-3602. DOI: 10.2140/agt.2013.13.3537

金 英子, 高沢 光彦, Pseudo-Anosovs on closed surfaces having small entropy and the Whitehead sister link exterior, Journal of the Mathematical Society of Japan 65, Number 2 (2013), 411-446. <https://projecteuclid.org/euclid.jmsj/1366896640>

金 英子, Notes on pseudo-Anosovs with small dilatations coming from the magic 3-manifold, 数理解析研究所考究録 1836 (2013) 45-64.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1836-05.pdf>

〔学会発表〕(計 11 件)

金 英子, Braids, free group automorphisms and orderings, リーマン面・不連続群論研究集会, 2016 年 2 月 13 日, 東京工業大学 (東京).

金 英子, The asymptotic behavior of the minimal pseudo-Anosov dilatations in the hyperelliptic handlebody groups}, The 11th East Asian School of Knots and Related Topics, 2016 年 1 月 26 日, 大阪市立大学 (大阪).

金 英子, Braids, automorphisms and orderings, PIMS (Pacific Institute for the mathematical sciences) topology seminar, 2015 年 11 月 4 日, University of British Columbia, (バンクーバー・カナダ)

金 英子, Pseudo-Anosov elements with small dilatations in the spherical wicket braid groups, 冬の力学系研究集会, 日本大学軽井沢研究所, 2015 年 1 月 12 日 (軽井沢・長野)

金 英子, The asymptotic behavior of minimal dilatations in the spherical wicket braid groups, Hurwitz action HINERU, 2015 年 1 月 10 日, 大阪電気通信大学 (大阪).

金 英子, The magic 3-manifold, horseshoe braids and minimal dilatation problem, Boston University/Keio University Workshop 2014, Dynamical Systems, 2014 年 9 月 19 日, ボストン大学 (ボストン・アメリカ).

金 英子, Dynamics of the monodromies of the fibrations on the magic 3-manifold Geometric Group Theory and Geometric Structures, 2014 年 8 月 7 日, KAIST (テジョン・韓国).

金 英子, Monodromies of fibrations on the magic 3-manifold, 冬の力学系研究集会, 2014年1月12日, 広島大学(広島).

金 英子, Monodromies of fibrations on the magic 3-manifold, トポロジーとコンピュータ 2013, 2013年11月31日, 明治大学(東京).

10 金 英子, Minimal dilatations of pseudo-Anosovs and a mystery of the magic 3-manifold, Topology, Geometry and Group Theory, Informed by Experiment, 2013年10月23日, Brown University (ボストン, アメリカ).

11 金 英子, Minimal dilatations of pseudo-Anosovs generated by the magic 3-manifold and their asymptotic behavior, リーマン面・不連続群論研究集会, 2013年1月12日, 大阪大学(大阪).

〔その他〕

金 英子のホームページ

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~kin/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金 英子 (KIN, Eiko)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 80378554

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし