

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2012～2015

課題番号：24740055

研究課題名(和文) ランダム媒質中の確率過程

研究課題名(英文) Stochastic processes in random media

研究代表者

福島 竜輝 (Fukushima, Ryoki)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：60527886

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：不純物を含む媒質における物理現象が、均質な媒質とどのように異なるかについて研究を行った。とくに合金などにおける電子の振る舞いを記述するアンダーソン模型と呼ばれるモデルにおいて、均質な媒質が良い近似になる場合があることと、不純物による揺らぎ(誤差)がどの程度あるかということ詳しく決定した。またこれとは別に高分子のモデルにおいて、不純物の影響を強くした極限を考察し、それが自然でより単純なモデルで近似できることを示した。

研究成果の概要(英文)：I have studied how disorders in materials affect the physical phenomenon. In particular, it is proved that the Anderson model, which is supposed to describe the state of an electron in disordered media, can be approximated by the homogeneous model in a certain scaling. Moreover, the scale and nature of the fluctuation caused by random disorder is determined in detail. Aside from this, a polymer model in a disordered solvent is also studied. In the limit of strong disorder, it is shown that the model can be approximated by another natural and simple model.

研究分野：確率論

キーワード：不規則媒質 確率過程 均質化

### 1. 研究開始当初の背景

本研究を開始した時期の前後にランダム媒質中の熱や粒子の拡散について、離散空間の設定で詳細な結果が得られるようになっていた。とくにランダムな湧き出しや吸い込みを伴う拡散方程式のモデルである放物型 Anderson 模型については、媒質が十分良い独立性を持つ場合には粒子が局在することに加えて、その位置や程度についても極めて精密な結果が得られていた (Gartner-Konig-Mochanov 2007 や Konig-Lacoin-Morters-Sidorova 2009)。一方で媒質が長距離相関を持つような場合には一般的にはより多様な状況が有り得て、そのような状況の解析は具体例に限ってもほとんどなかった。

またパーコレーションクラスターのようなランダムなグラフの上で路の数を調べる研究が始まりつつあった。これは古くは Darling 1991 に遡るがそこでは簡単な状況だけが考察され、一般の場合にはその総数が完全格子と同様に指数増大するかという基本的な問題すら未解決であった。

### 2. 研究の目的

本研究はランダム媒質中の熱や粒子の拡散について、とくにそれが均質な媒質とは異なる局在現象を呈する場合を調べることを目指して行った。具体的には局在している場合に均質な場合とどれくらいスケールが違うかということや、ランダム媒質の影響の強度に応じて局在 / 非局在の転移が起こるようなことがあるのかを理解することが目的であった。

ランダムなグラフの上で路の数の問題も上の問題と関連づけることができ、実際 Darling が扱わなかった簡単でない状況は、考えているランダムなグラフ上の酔歩がある意味で局在している相に対応していることが分かっている。この問題では上記の通り基本的な問題が解決されずに残っているので、まず決まった長さの路の総数を調べる方法をいくつか見出すことを目標に研究を行った。

### 3. 研究の方法

一つの典型的なモデルである Anderson 模型については、まず局在を精密に示すためには経路積分表示を通じて主に大偏差原理を援用した解析を行った。しかし自然な Gibbs 測度の下での局在を望ましい精度で確立するには大偏差原理から分かる一次近似では不十分であり、随所で関数解析的視点と確立解析的視点を組み合わせて議論を進める必要があった。その後、局在 / 非局在の転移を調べる研究も行ったが、そこではランダム作用素のスペクトルという観点で定式化を行った。技術的には楕円型方程式の正則性理論 (Moser による Sobolev 不等式の反復適用) や数値解析における有限要素法、測度の集中

(Talagrand の不等式) といった予想外の多くの手法を組み合わせることで使ったこととなったが、中でもシュレーディンガー半群の研究で古典的な Khas ' minskii の補題と測度の集中がこの種の研究で非常に有効に働くことが分かったことは有益な知見であった。最後にランダムなグラフでの路の数え上げの問題では、当初はどちらかという組み合わせ論的な方法で進めていたが、最近では測度の集中を使う方法が有効である場合が多いことも分かってきた。

### 4. 研究成果

(1) 放物型 Anderson 模型に関しては、連続空間でもっとも標準的な Poisson 点過程に従って遠距離相互作用を持つポテンシャルを配置したモデルを考察し、非常に精密な局在現象を示した。この問題は近距離相互作用の場合に分配関数にあたるものの漸近挙動を決定した Donsker-Varadhan の研究が有名であり、それに続いて Sznitman, Povel が Gibbs 測度のもとでの確率過程の局在も示している。しかしながら遠距離相互作用の場合は描像そのものが異なることが Pastur によって示されていた。この問題に関して代表者は 2011 年に Pastur による分配関数の挙動を精密化し、それまでの結果では捉えきれなかった確率過程の挙動に関する予想を得ていた。本研究ではその予想が正しいことを厳密に示すことに成功した。とくに Sznitman, Povel の研究では確率過程が球の中に留まるように条件づけられた Brown 運動に収束する結果になっていたのに対して、長距離相関のあるモデルではそれとは全く異なる Ornstein-Uhlenbeck 過程と呼ばれる確率過程に収束することを示した。

(2) Anderson 模型に関してこれまで扱われてこなかったいわゆる均質化の問題を調べ、ランダム媒質に関するモーメントの条件によって局在 / 非局在の転移が起こることを示した。この問題ではさらに進んで、均質化の極限の周りの揺らぎも研究し、中心極限定理に当たる結果も得ている。なおここで扱ったのと類似の crushed ice problem と呼ばれる問題に関しては 1990 年代に小沢真氏によって解析的な手法で同様の結果が得られている。しかし小沢氏の研究では次元による制限などが残されており、また問題自身は確率論的であることから、小沢氏は確率論的な証明を与えよという問題を提起している。今回得た結果は少し異なる設定ではあるが、小沢氏の問題に答えるものと考えられる。

(3) ランダムなグラフでの路の数え上げの問題では、長さに関して指数的に増大するかという基本的な問題すら一般には未解決であったが、これを解決した。とくに道の数え上げに限らずより一般の初期値について加法性を持つ成長模型について、自然な過程の下では絶滅するか指数増大するかのいずれかであることを示した。また路の数え上げの

問題がよりよく調べられているある高分子模型の零温度極限と見なせることに着目し、いわゆる自由エネルギーの零温度での連続性を示すことによって指数増大の速度を決定するという新しい方向性の研究も行った。またその過程では、自然にあるランダムグラフでの最短経路の問題が現れ、それはこれまでに見られなかったような興味深い相転移を示すことも数値実験により観察された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件) 全て査読あり

- (1) Ryoki Fukushima, Nobuo Yoshida: On exponential growth for a certain class of linear systems, ALEA, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, vol. 9, no. 2, 323-336 (2012)
- (2) Ryoki Fukushima: Annealed Brownian motion in a heavy tailed Poissonian potential, Annals of Probability, vol. 41, no. 5, 3462-3493 (2013)
- (3) Ryoki Fukushima, Naoki Kubota: Quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment with holding times, Journal of Theoretical Probability, vol. 27, issue 4, 1140-1166 (2014)
- (4) Francis Comets, Ryoki Fukushima, Shuta Nakajima, Nobuo Yoshida: Limiting results for the free energy of directed polymers in random environment with unbounded jumps, Journal of Statistical Physics, vol. 161, issue 3, 577-597 (2015)

[学会発表](計 21 件)

- (1) Ryoki Fukushima: Annealed Brownian motion in a heavy tailed Poissonian potential, Workshop on random polymer models and related problems, 2012.5.23, National university of Singapore. (招待講演)
- (2) Ryoki Fukushima: Localization for annealed Brownian motion in a heavy tailed Poissonian potential, 11<sup>th</sup> workshop on stochastic analysis on large scale interacting systems, 2012.7.5, the university of Tokyo. (招待講演)
- (3) Ryoki Fukushima: Annealed Brownian motion in a heavy tailed Poissonian potential, 2012.9.26, Okayama university.

- (4) Ryoki Fukushima: On Poisson Anderson model with polynomial decaying single site potential, スペクトル・散乱理論とその周辺, 2012.12.4, Kyoto university.
- (5) Ryoki Fukushima: Anderson模型に関する話題, 確率論シンポジウム, 2012.12.19, Kyoto university. (招待講演)
- (6) Ryoki Fukushima: On exponential growth for a certain class of linear systems, Markov chains on graphs and related topics, 2013.2.14, Kyoto university. (招待講演)
- (7) Ryoki Fukushima: Localization of Brownian motion in random potentials, New directions in probability, 2013.6.1, Indian statistical institute, Bangalore. (招待講演)
- (8) Ryoki Fukushima: Brownian motion in a heavy tailed Poissonian potential, Pacific Rim mathematical association congress 2013, 2013.6.25, Shanghai Jiao Tong university. (招待講演)
- (9) Ryoki Fukushima: On exponential growth for a certain class of linear systems, JSPS-DST Asian academic seminar 2013, 2013.11.4, the university of Tokyo. (招待講演)
- (10) Ryoki Fukushima: Large deviations for random walks with random holding times, 12<sup>th</sup> workshop on stochastic analysis on large scale interacting systems, 2013.11.23, the university of Tokyo. (招待講演)
- (11) Ryoki Fukushima: Directed polymerの零温度極限について, 無限粒子系、確率場の諸問題IX, 2013.1.11, Nara women's university.
- (12) Ryoki Fukushima: ランダムウォークの滞在時間の同時分布とLaplace原理への応用, 確率論早春セミナー, 2014.3.7, Kyoto university. (招待講演)
- (13) Ryoki Fukushima: Biased review on the Anderson model, Doctorial forum of mathematics between Fudan and Kyoto universities, 2014.11.03, Fudan university. (招待講演)
- (14) Ryoki Fukushima: Eigenvalue fluctuation for lattice Anderson Hamiltonian, 13<sup>th</sup> workshop on stochastic analysis on large scale interacting systems, 2014.11.6, the university of Tokyo.
- (15) Ryoki Fukushima: Homogenization and fluctuation for eigenvalues of lattice Anderson Hamiltonians, Spectrum of random operators and related topics, 2015.1.8, Kyoto university.

- (16) Ryoki Fukushima: Anderson模型の固有値の揺らぎについて, 新潟確率論ワークショップ, 2015.1.23, Niigata university.
- (17) Ryoki Fukushima: Limiting results for the free energy of directed polymers in random environment with unbounded jumps, 日本数学会2015年度年会, 2015.3.21, Meiji university.
- (18) Ryoki Fukushima: Eigenvalue fluctuations for lattice Anderson Hamiltonians, 日本数学会2015年度年会, 2015.3.21, Meiji university.
- (19) Ryoki Fukushima: Homogenization of the Anderson model, New trends in stochastic analysis, 2015.7.9, 国際高等研究所. (招待講演)
- (20) Ryoki Fukushima: Fluctuation of spectra in random media revisited, Stochastic analysis, 2015.9.8, Kyoto university. (招待講演)
- (21) Ryoki Fukushima: ランダム媒質における路の数え上げと最短経路に関する話題, IMI-RIMS共共拠点研究会, 2015.12.8, Kyushu university. (招待講演)

(2) 研究分担者 ( )

研究者番号 :

(3) 連携研究者 ( )

研究者番号 :

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況(計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ryoki/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

福島 竜輝 (FUKUSHIMA RYOKI)  
京都大学・数理解析研究所・講師  
研究者番号 : 6 0 5 2 7 8 8 6